X Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Karlov pod Pradědem (Czechy), 16 maja 2022 r.

Zawody indywidualne

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

Szkice rozwiązań zadań

1. Niech $n \geqslant 3$. Przypuśćmy, że $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są n parami różnymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz, w zależności od n, najmniejszą możliwą liczbę różnych wartości przyjmowanych przez następujące n liczb:

$$a_1+a_2, \quad a_2+a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1}+a_n, \quad a_n+a_1.$$

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ szukana najmniejsza możliwa różnych wartości jest równa **3**.

Przyjmijmy oznaczenia $s_1 = a_1+a_2$, $s_2 = a_2+a_3$, …, $s_n = a_n+a_1$. Zauważmy, że jeżeli $s_1 = s_2$, to $a_1 = a_3$, co przeczy założeniu, że dane liczby są parami różne. Wobec tego $s_1 \neq s_2$, czyli wśród liczb s_1, s_2, …, s_n występują *co najmniej* dwie różne wartości.

Przypuśćmy, że istnieje układ liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dla którego wśród liczb $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pojawiają się *dokładnie* dwie różne wartości: $s_1 = A$ oraz $s_2 = B$. Rozumując podobnie jak w poprzednim akapicie, możemy uzasadnić, że $s_2 \neq s_3$, skąd $s_3 = A$. Analogicznie wnioskujemy, że $s_4 = B$, $s_5 = A$ itd.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $s_n = A = s_1$, skąd otrzymujemy $a_n = a_2$, co przeczy założeniu, że liczby a_n oraz a_2 są różne. Pozostał do rozważenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 2$. Wówczas

$$\begin{aligned} k \cdot A &= s_1+s_3+s_5+\ldots+s_{2k-1} = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k} = \\ &= a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2k}+a_1 = s_2+s_4+s_6+\ldots+s_{2k} = k \cdot B, \end{aligned}$$

skąd $A = B$, co przeczy założeniu, że wartości A i B są różne. Tym samym udowodniliśmy, że dla żadnego $n \geqslant 3$ nie jest możliwe, aby wśród liczb $s_1, s_2, \ldots, s_n$ występowały dokładnie dwie różne wartości.

Pozostaje udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 3$ można wskazać przykład układu liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dla którego uzyskujemy dokładnie trzy różne wartości pośród $s_1, s_2, \ldots, s_n$. W tym celu wystarczy przyjąć na przykład

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = 3, \quad a_6 = -3, \quad \ldots$$

Wówczas dla każdej dodatniej liczby nieparzystej i mniejszej od n mamy $s_i = 0$, dla każdej dodatniej liczby parzystej i mniejszej od n mamy $s_i = 1$ i wreszcie

$$s_n = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą parzystą;} \\ \frac{n+3}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

---

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych następujący układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = yz+1, \\ y^2 = zx+1, \\ z^2 = xy+1. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że jedynymi rozwiązaniami danego układu są trójki (x, y, z), w których występują (w dowolnej kolejności) liczby -1, 0, 1.

Przypuśćmy, że trójka liczb całkowitych (x, y, z) spełnia dany układ równań.

Sposób I

Przekształcając wyjściowy układ równań, uzyskujemy

$$\begin{cases} x^2-1=yz, \\ y^2-1=zx, \\ z^2-1=xy. \end{cases}$$

Mnożąc wszystkie powyższe równości stronami, otrzymujemy

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=x^2y^2z^2.$$

Przypuśćmy, że $xyz\neq 0$. Dzieląc powyższe równanie stronami przez $x^2y^2z^2$, uzyskujemy

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)=1. \qquad (1)$$

Zauważmy, że skoro $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, to

$$0\leqslant 1-\frac{1}{x^2}<1, \quad 0\leqslant 1-\frac{1}{y^2}<1 \quad \text{oraz} \quad 0\leqslant 1-\frac{1}{z^2}<1.$$

Mnożąc powyższe trzy nierówności stronami otrzymujemy

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)<1,$$

co przeczy równości (1).

Wobec tego pewna spośród liczb x, y, z jest równa 0. Jeśli $x=0$, to drugie i trzecie równanie początkowego układu implikuje, że $|y|=|z|=1$. Z pierwszego równania mamy zaś $yz=-1$. Stąd otrzymujemy trójki rozwiązań $(x,y,z)=(0,1,-1)$ oraz $(x,y,z)=(0,-1,1)$, które w istocie spełniają początkowy układ. Analogiczne rozumowanie w przypadkach $y=0$ oraz $z=0$, prowadzi do rozwiązań $(1,0,-1)$, $(-1,0,1)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$.

Sposób II

Mnożąc obie strony pierwszego równania wyjściowego układu przez y, drugiego przez z, a trzeciego przez x, otrzymujemy

$$\begin{cases} x^2y=y^2z+y, \\ y^2z=z^2x+z, \\ z^2x=x^2y+x. \end{cases}$$

Dodając te trzy równości stronami, uzyskujemy

$$x+y+z=0. \qquad (2)$$

Podstawiając $x=-y-z$ do pierwszego równania wyjściowego układu, otrzymujemy

$$yz+1=x\cdot x=x\cdot(-y-z)=-xy-zx,$$

czyli

$$xy+yz+zx=-1.$$

Z połączenia powyższej równości z równością (2) płynie wniosek, że

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=2.$$

Wobec tego, skoro liczby x, y, z są całkowite, to pewna z nich wynosi 0. Dalszą część rozwiązania przeprowadzamy tak jak w poprzednim sposobie.

---

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$\sphericalangle A=60^\circ, \quad \sphericalangle B=100^\circ, \quad \sphericalangle C=140^\circ.$$

Wykaż, że pięciokąt ten można umieścić w kole o promieniu $\frac{2}{3}AD$.

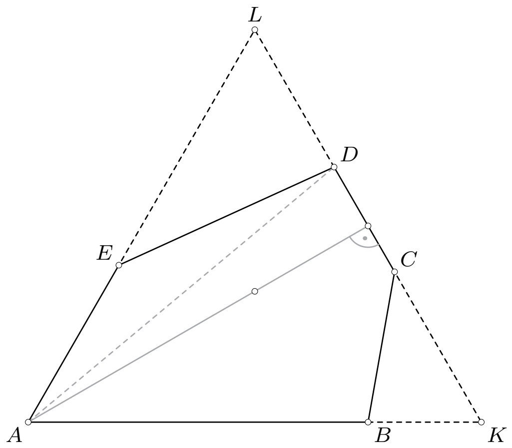
Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L punkty przecięcia prostej CD odpowiednio z prostymi AB i AE. Ponieważ $\sphericalangle KAL=60^\circ$ oraz

$$\sphericalangle AKL=180^\circ-\sphericalangle KBC-\sphericalangle KCB=180^\circ-80^\circ-40^\circ=60^\circ,$$

więc trójkąt AKL jest równoboczny.

Zauważmy, że odcinek AD, łączący w trójkącie AKL wierzchołek A z pewnym punktem na przeciwległym boku, ma długość nie mniejszą niż odległość punktu A od boku KL, czyli nie mniejszą niż wysokość trójkąta AKL. Z kolei promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym AKL ma długość równą $\frac{2}{3}$ wysokości tego trójkąta.



Łącząc obserwacje z poprzedniego akapitu, uzyskujemy, że długość promienia okręgu opisanego na trójkącie AKL jest nie większa od $\frac{2}{3}AD$. Wynika stąd teza zadania, gdyż pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kole okręgu opisanego na trójkącie AKL, a to koło albo ma promień $\frac{2}{3}AD$, albo ma mniejszy promień (i wówczas można je umieścić w kole o promieniu $\frac{2}{3}AD$).

---

4. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Założenie $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ można przekształcić do postaci $a^2 > 2b^2$. Ponieważ liczby a^2 oraz $2b^2$ są całkowite, więc oznacza to, że $a^2 \geqslant 2b^2 + 1$, skąd

$$(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \geqslant 1, \quad \text{czyli} \quad a - b\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{a + b\sqrt{2}}.$$

Wobec tego możemy zapisać

$$\frac{a}{b} - \sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{b} \geqslant \frac{1}{b(a + b\sqrt{2})} > \frac{1}{b(a + a)} = \frac{1}{2ab},$$

przy czym druga nierówność wynika z założenia $b\sqrt{2} < a$. To kończy rozwiązanie.

Sposób II

Mnożąc dowodzoną nierówność obustronnie przez liczbę $2ab$, a następnie podnosząc obie strony do kwadratu, uzyskujemy równoważną postać

$$(2a^2 - 1)^2 > \left(2\sqrt{2}ab\right)^2, \quad \text{czyli} \quad 4a^4 - 4a^2 + 1 > 8a^2b^2.$$

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że $a^2 \geqslant 2b^2 + 1$, czyli $a^2 - 1 \geqslant 2b^2$. Stąd otrzymujemy

$$4a^4 - 4a^2 + 1 > 4a^4 - 4a^2 = 4a^2(a^2 - 1) \geqslant 8a^2b^2,$$

co było do udowodnienia.

Sposób III

Przypuśćmy nie wprost, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} \leqslant \sqrt{2}.$$

Zauważmy, że w powyższej nierówności nie może zachodzić równość, gdyż liczba po lewej stronie jest wymierna, a liczba po prawej stronie jest niewymierna. To oznacza, że

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{2ab}<\sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad a-\frac{1}{2a}<b\sqrt{2}.$$

W połączeniu z założeniem $a>b\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$a-\frac{1}{2a}<b\sqrt{2}<a.$$

Podnosząc do kwadratu trzy powyższe wyrażenia, mamy

$$a^2-1+\frac{1}{4a^2}<2b^2<a^2.$$

Stąd wniosek, że liczba całkowita $2b^2$ znajduje się pomiędzy kolejnymi liczbami całkowitymi a^2-1 oraz a^2. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Uwaga

Procedura wielokrotnego zastępowania liczby $\frac{a}{b}$ przez liczbę $\frac{a}{b}-\frac{1}{2ab}=\frac{2a^2-1}{2ab}$ pozwala na szybkie i dokładne przybliżanie pierwiastków z liczb całkowitych liczbami wymiernymi. Konkretnie, można udowodnić, że rozpoczynając od $\frac{a}{b}$ i iterując opisaną powyżej procedurę zastępowania ułamków, uzyskujemy coraz lepsze przybliżenia liczby

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{b}.$$

Przykładowo, rozpoczynając od ułamka $\frac{3}{2}$, możemy w ten sposób przybliżyć liczbę $\sqrt{2}$:

$$\frac{3}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{2\cdot 3^2-1}{2\cdot 3\cdot 2}=\frac{17}{12} \quad \longrightarrow \quad \frac{2\cdot 17^2-1}{2\cdot 17\cdot 12}=\frac{577}{408} \quad \longrightarrow \quad \ldots.$$

Już po dwóch krokach uzyskujemy $\frac{577}{408}\approx 1{,}414215$, co różni się od $\sqrt{2}\approx 1{,}414213$ dopiero na szóstej pozycji po przecinku.

---

5. Liczbę całkowitą $n\geqslant 1$ nazwiemy *dobrą* jeśli spełniona jest następująca własność:

Jeżeli dodatnia liczba całkowita jest podzielna przez każdą z dziewięciu liczb $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+9$, to jest również podzielna przez liczbę $n+10$.

Ile jest dobrych liczb całkowitych $n\geqslant 1$?

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Jest dokładnie **38** liczb dobrych.

Udowodnimy, że liczba całkowita $n\geqslant 1$ jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy każda potęga liczby pierwszej p^α dzieląca $n+10$ spełnia nierówność $p^\alpha\leqslant 9$.

($\Rightarrow$) Przypuśćmy, że liczba n jest dobra. Załóżmy nie wprost, że istnieje taka liczba pierwsza p i wykładnik $\alpha\geqslant 1$, że

$$p^\alpha \mid n+10 \quad \text{oraz} \quad p^\alpha>9.$$

Zauważmy, że wówczas żadna z dziewięciu liczb

$$n+1=(n+10)-9, \quad n+2=(n+10)-8, \quad \ldots, \quad n+9=(n+10)-1$$

nie jest podzielna przez p^α. Stąd wniosek, że liczba $L=\mathrm{NWW}(n+1,n+2,\ldots,n+9)$ również nie jest podzielna przez p^α.

Z drugiej strony, liczba L jest podzielna przez liczby $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+9$. Stąd, skoro liczba n jest dobra, to $n+10$ jest dzielnikiem liczby L. Jednakże $p^\alpha \mid n+10$, zatem $p^\alpha \mid L$, co przeczy konkluzji poprzedniego akapitu.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że

$$n+10 \;=\; p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k},$$

przy czym p_1, p_2, $\ldots$, p_k są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $p_i^{\alpha_i}\leqslant 9$ dla $i=1,2,\ldots,k$.

Niech N będzie dowolną liczbą całkowitą podzielną przez każdą z liczb $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$. Zauważmy, że dla każdego $i=1,2,\ldots,k$ zachodzą związki

$$p_i^{\alpha_i} \mid n+10-p_i^{\alpha_i} \quad \text{oraz} \quad n+10-p_i^{\alpha_i} \in \{n+1, n+2, \ldots, n+9\}.$$

Stąd wniosek, że $p_i^{\alpha_i}$ jest również dzielnikiem liczby N. Skoro liczby $p_i^{\alpha_i}$ dla $i=1,2,\ldots,k$ są parami względnie pierwsze, to

$$n+10 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \mid N.$$

Oznacza to, że liczba n jest dobra.

Przypuśćmy, że n jest dobra. Udowodniona charakteryzacja implikuje, że $n+10=2^a 3^b 5^c 7^d$ dla pewnych liczb $a \in \{0,1,2,3\}$, $b \in \{0,1,2\}$, $c \in \{0,1\}$, $d \in \{0,1\}$. Łącznie otrzymujemy więc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ możliwych wartości liczby $n+10$, jednak dla dziesięciu spośród nich (od 1 do 10) liczba n nie jest dodatnia. Wobec tego liczb dobrych jest dokładnie $48-10=38$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki