

# XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia  
(14 stycznia 2023 r.)



1. Na bokach  $AB$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  leżą odpowiednio takie punkty  $D$  i  $E$ , że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED.$$

Wykaż, że  $AE = BE$ .

2. Początkowo na tablicy napisane są liczby 2 oraz 5. *Ruch* polega na zastąpieniu jednej z dwóch liczb napisanych na tablicy ich sumą. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów można uzyskać sytuację, w której na tablicy napisane są dwie kolejne liczby naturalne? Odpowiedź uzasadnij.

3. Liczba naturalna  $n$  jest co najmniej dwucyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności tej liczby wpiszemy pewną cyfrę, to uzyskamy sześciokrotność liczby  $n$ . Wyznacz wszystkie liczby  $n$  o tej własności.

4. Dany jest równoległobok  $ABCD$ , w którym  $AB > AD$ . Punkty  $X$  oraz  $Y$ , różne od  $B$ , leżą na półprostej  $BD^{\rightarrow}$ , przy czym

$$CX = CB \quad \text{oraz} \quad AY = AB.$$

Udowodnij, że  $DX = DY$ .

*Uwaga:* Zapis  $BD^{\rightarrow}$  oznacza półprostą o początku w punkcie  $B$  przechodzącą przez punkt  $D$ .

5. W każde pole tabeli  $4 \times 4$  wpisano jedną z liczb 1 lub 2. Dla każdego wiersza obliczono sumę wpisanych w niego liczb, a dla każdej kolumny obliczono iloczyn wpisanych w nią liczb. Wykaż, że pewne dwa z ośmiu uzyskanych wyników są równe.