Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 16 października 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n, że liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ jest pierwsza.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedyną taką liczbą jest $n=\mathbf{1}$.

Zauważmy, że

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{99\ldots9}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot9=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}9.$$

Jeśli $n\geqslant 2$, to powyższa liczba jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1, więc jest liczbą złożoną. Z kolei dla $n=1$ otrzymujemy liczbę 19, która jest pierwsza.

2. Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach AC oraz BC trójkąta ABC. Punkt M jest środkiem odcinka XY. Załóżmy, że

$$AX=MX=MC=MY=BY.$$

Wyznacz miarę kąta AMB.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Kąt AMB ma miarę $\mathbf{135^\circ}$.

Przyjmijmy oznaczenia $\alpha=\sphericalangle MAX$, $\beta=\sphericalangle MBY$ (rys. 1). Ponieważ trójkąty AMX oraz BMY są równoramienne, więc również $\sphericalangle AMX=\alpha$ oraz $\sphericalangle BMY=\beta$. Ponadto

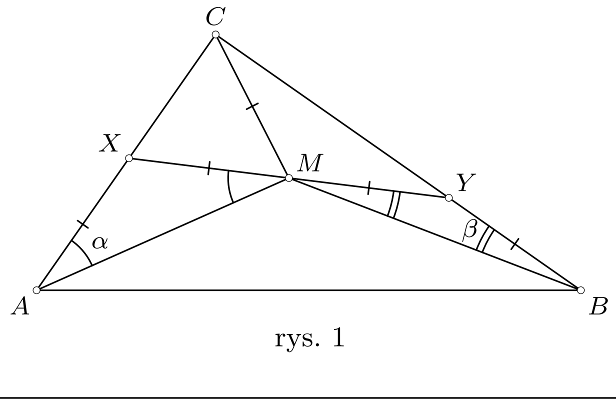
$$\sphericalangle MXC=180^\circ-\sphericalangle AXM=\sphericalangle MAX+\sphericalangle AMX=2\alpha,$$
$$\sphericalangle MYC=180^\circ-\sphericalangle MYB=\sphericalangle MBY+\sphericalangle BMY=2\beta.$$

Trójkąty CMX i CMY są równoramienne, więc $\sphericalangle MCX=2\alpha$, $\sphericalangle MCY=2\beta$ i w konsekwencji $\sphericalangle CMX=180^\circ-4\alpha$ oraz $\sphericalangle CMY=180^\circ-4\beta$. Wobec tego

$$180^\circ=\sphericalangle CMX+\sphericalangle CMY=360^\circ-4\alpha-4\beta,\quad \text{skąd}\quad \alpha+\beta=45^\circ.$$

Ostatecznie uzyskujemy więc

$$\sphericalangle AMB=180^\circ-\sphericalangle AMX-\sphericalangle BMY=180^\circ-\alpha-\beta=135^\circ.$$



rys. 1

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Uwaga

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że $\sphericalangle XCY = 2\alpha + 2\beta = 90°$, czyli trójkąt ABC jest prostokątny. Przy okazji udowodniliśmy więc następujący fakt:

> *Jeżeli w trójkącie XYZ środkowa poprowadzona do boku XY ma długość równą połowie długości tego boku, to $\sphericalangle XZY = 90°$.*

---

3. Tomek ma do dyspozycji n jednakowych patyczków, z których układa liczby wielocyfrowe (rysunek przedstawia wygląd układanych przez Tomka cyfr). Tomek zauważył, że suma cyfr największej z możliwych do ułożenia przez niego liczb jest równa dokładnie n. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedyną taką liczbą jest $n = \mathbf{11}$.

Ponieważ każda cyfra składa się z co najmniej dwóch patyczków, więc dowolna ułożona przez Tomka liczba ma nie więcej niż $\frac{n}{2}$ cyfr. Rozważymy osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to jedyną liczbą $\frac{n}{2}$-cyfrową, którą Tomek może ułożyć jest liczba złożona z samych jedynek — jest to więc największa z możliwych do ułożenia liczb. Suma cyfr tej liczby jest równa $\frac{n}{2}$. Warunek zadania przybiera więc postać $\frac{n}{2} = n$, co nie jest możliwe dla żadnej dodatniej liczby n. W tym przypadku nie ma zatem rozwiązań.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $\frac{n}{2}$ nie jest liczbą całkowitą, więc układane liczby mają nie więcej niż $\frac{n-1}{2}$ cyfr. Ta liczba cyfr jest osiągalna jedynie gdy wszystkie cyfry są równe 1 poza jedną, równą 7 (jedyna cyfra złożona z trzech patyczków). Największa z możliwych do ułożenia liczb jest więc złożona z początkowej cyfry 7 i $\frac{n-3}{2}$ następujących po niej jedynek. Suma cyfr tej liczby jest równa

$$7 + \frac{n-3}{2} = \frac{n+11}{2}.$$

Warunek zadania przybiera więc postać $\frac{n+11}{2} = n$, czyli $n = 11$. Otrzymana liczba jest nieparzysta, więc stanowi rozwiązanie w tym przypadku.

---

4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które można przedstawić jako różnicę sześcianów dwóch liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedyną taką liczbą pierwszą jest $\mathbf{19} = 3^3 - 2^3$.

Załóżmy, że pewna liczba pierwsza p spełnia równość $p = q^3 - r^3$, gdzie q i r są liczbami pierwszymi oraz $q > r$. Rozkładając różnicę sześcianów na czynniki, uzyskujemy więc

$$p = (q-r)(q^2 + qr + r^2).$$

Zauważmy, że obydwa czynniki są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $q - r < q < q^2 + qr + r^2$. Skoro p jest liczbą pierwszą, to mniejszy czynnik jest równy 1, większy zaś jest równy p, czyli

$$q - r = 1 \quad \text{oraz} \quad q^2 + qr + r^2 = p.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

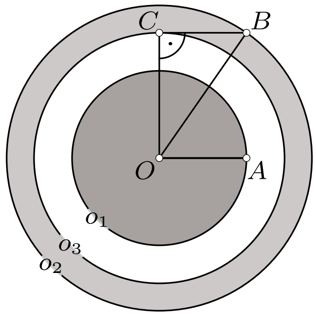
Ponieważ liczby q i r różnią się o 1, więc jedna z nich jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, a jedyną liczbą pierwszą różniącą się od niej o 1 jest 3 — wobec tego $q=3$ oraz $r=2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskana w tym przypadku liczba $q^3-r^3=19$ jest pierwsza.

---

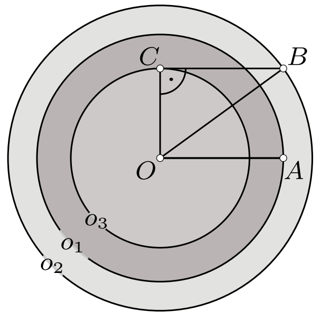
5. Dane są trzy okręgi o_1, o_2, o_3 o wspólnym środku O. Na tych okręgach leżą odpowiednio punkty A, B, C, przy czym czworokąt $ABCO$ jest prostokątem. Wykaż, że pole koła ograniczonego okręgiem o_1 jest równe polu pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_2 i o_3.

Rozwiązanie

Pole koła ograniczonego okręgiem o_1 jest równe $\pi\cdot OA^2$. W trójkącie prostokątnym OBC przeciwprostokątna OB jest dłuższa niż przyprostokątna OC, czyli okrąg o_2 ma większy promień niż okrąg o_3 (rys. 2). W takim razie pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_2 i o_3 jest równe $\pi\cdot OB^2-\pi\cdot OC^2$.



rys. 2



rys. 3

Teza zadania przybiera więc postać

$$\pi\cdot OA^2=\pi\cdot OB^2-\pi\cdot OC^2, \quad \text{czyli} \quad OA^2+OC^2=OB^2.$$

Ostatnia równość wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego OBC oraz z równości $OA=BC$.

Uwaga

Z warunków zadania nie wynika nierówność pomiędzy długościami promieni okręgów o_1 oraz o_3. Oprócz konfiguracji okręgów przedstawionej na rysunku 2 jest więc także konfiguracja przedstawiona na rysunku 3. Przedstawione rozwiązanie jest poprawne w obydwu przypadkach.

---

6. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Udowodnij, że jeżeli pewne dwie z liczb

$$ab+b+1, \quad bc+c+1, \quad ca+a+1$$

są równe 0, to także trzecia z nich jest równa 0.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $ab+b+1=0$ oraz $bc+c+1=0$. Udowodnimy, że $ca+a+1=0$. Rozumowanie w dwóch pozostałych przypadkach jest w pełni analogiczne.

Sposób I

Wyznaczając liczbę b w zależności od a z pierwszego równania, otrzymujemy

$$b(a+1)=-1, \quad \text{czyli} \quad b=-\frac{1}{a+1}.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Analogicznie z drugiego równania otrzymujemy $c = -\dfrac{1}{b+1}$. Wykorzystując otrzymaną wcześniej równość, uzyskujemy

$$c = -\frac{1}{-\frac{1}{a+1}+1} = -\frac{a+1}{-1+(a+1)} = -\frac{a+1}{a}.$$

Po przekształceniu, otrzymujemy $ca = -(a+1)$, czyli $ca + a + 1 = 0$.

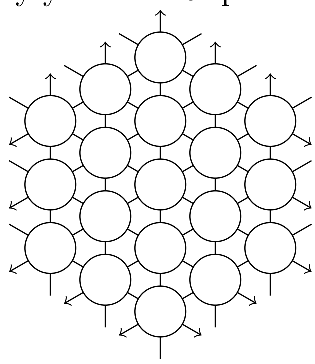
Sposób II

Zauważmy, że

$$ca+a+1 = ca+a+1+c(ab+b+1) = abc+ca+a+bc+c+1 = a(bc+c+1)+bc+c+1 = 0.$$

---

7. Czy w pola diagramu przedstawionego na rysunku obok można wpisać liczby całkowite od 11 do 29, każdą dokładnie raz, w taki sposób aby sumy liczb na wszystkich piętnastu odcinkach oznaczonych strzałkami były równe? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie wpisanie liczb **nie** jest możliwe.

Przypuśćmy, że wypełnienie pól diagramu zgodnie z warunkami zadania jest możliwe. Wówczas suma wszystkich pól wpisanych w pola diagramu jest równa

$$11+12+13+\ldots+29 = 380.$$

To oznacza, że suma liczb wpisanych w pola leżące na pojedynczym pionowym odcinku oznaczonym strzałką jest równa $\frac{1}{5} \cdot 380 = 76$ i w konsekwencji — suma liczb na każdym odcinku oznaczonym strzałką jest równa 76.

Rozwiązanie dokończymy dwoma sposobami.

Sposób I

Rozważmy dziewięć pól przedstawionych na rysunku 4. Z jednej strony, są to wszystkie pola położone na pewnych trzech odcinkach, więc suma wpisanych w nie liczb jest równa $3 \cdot 76 = 228$. Z drugiej strony, suma dziewięciu liczb wpisanych w pola diagramu nie może być większa niż suma dziewięciu największych dostępnych liczb, czyli

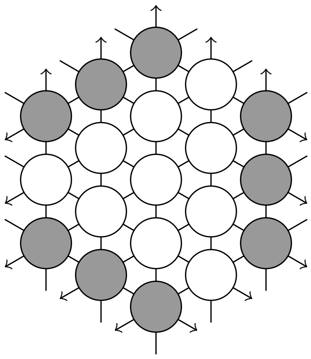
$$21+22+23+\ldots+29 = 225.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że wpisanie liczb zgodnie z warunkami zadania jest niemożliwe.

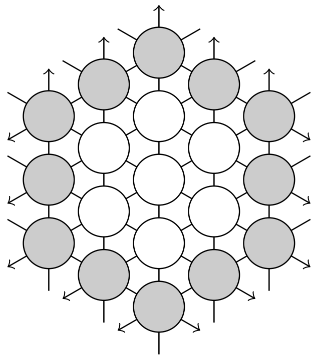
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

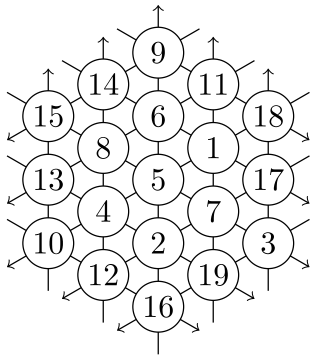
Ministerstwo Edukacji i Nauki



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Sposób II

Zauważmy, że jeśli strzałka zawiera trzy liczby, to każda z nich jest równa co najmniej 19. Rzeczywiście, gdyby na takiej strzałce pewna liczba była równa co najwyżej 18, to suma wszystkich trzech byłaby nie większa od $18+28+29=75$.

Z powyższej obserwacji wynika, że każda z dwunastu liczb znajdujących się na „obwodzie” diagramu (rys. 5) jest większa od 18. Jednak jest tylko jedenaście liczb pomiędzy 19 a 29. Otrzymana sprzeczność oznacza, że wpisanie liczb zgodnie z warunkami zadania nie jest możliwe.

Uwaga

Można udowodnić, że jedynym ciągiem dziewiętnastu kolejnych liczb naturalnych, które można wpisać w pola diagramu zgodnie z poleceniem są liczby od 1 do 19. Odpowiednio wypełniony diagram jest przedstawiony na rysunku 6 i przedstawia jedyny możliwy (z dokładnością do obrotów i odbić symetrycznych) sposób wpisania liczb.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki