XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia

(13 stycznia 2024 r.)

1. Liczby całkowite a, b oraz c są takie, że iloczyny

$$a\cdot(b+c) \quad \text{oraz} \quad b\cdot(a+c)$$

są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Kwadrat 6×6 rozcięto na osiem prostokątów, z których każdy ma cztery boki o całkowitych długościach. Wykaż, że pewne dwa z tych ośmiu prostokątów mają równe pola.

3. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt P leży na odcinku AC, przy czym

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB.$$

Wykaż, że $AP=CD$.

4. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$. Odcinki KL, MN, LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach. Udowodnij, że odcinki KL, MN, KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

5. Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czterysta z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czterysta — żółtą. Wykaż, że można zmazać pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

Uwaga. Liczby na tablicy mogą się powtarzać.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej