XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (13 stycznia 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a, b oraz c są takie, że iloczyny

$$a\cdot(b+c) \quad \text{oraz} \quad b\cdot(a+c)$$

są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Załóżmy, że liczba $a\cdot(b+c)$ jest większa od liczby $b\cdot(a+c)$ — w myśl warunków zadania jest więc większa dokładnie o 1. Stąd wynika, że

$$1=a\cdot(b+c)-b\cdot(a+c)=ab+ac-(ab+bc)=ac-bc=c(a-b).$$

Liczby c oraz $a-b$ są całkowite, a ich iloczyn jest równy 1 — oznacza to, że obie są równe 1 lub obie są równe -1. W obu przypadkach otrzymujemy $a-b=c$, czyli $a=b+c$, a zatem $a\cdot(b+c)=a^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozumowanie w przypadku, gdy liczba $b\cdot(a+c)$ jest większa od liczby $a\cdot(b+c)$ jest w pełni analogiczne — wówczas otrzymujemy $b\cdot(a+c)=b^2$.

Sposób II

Po wymnożeniu nawiasów dane wyrażenia przybierają postać $ab+ac$ oraz $ab+bc$. Są one zatem kolejnymi liczbami całkowitymi dokładnie wtedy, gdy iloczyny ac oraz bc są kolejnymi liczbami całkowitymi, czyli gdy

$$1=|ac-bc|=|(a-b)c|=|a-b|\cdot|c|.$$

Stąd otrzymujemy $|a-b|=|c|$ (obie strony tej równości są równe 1). Wynika z tego, że liczby $a-b$ oraz c są równe lub przeciwne. Jeżeli $a-b=c$, to $a(b+c)=a^2$, a jeżeli $a-b=-c$, to $b(a+c)=b^2$.

2. Kwadrat 6×6 rozcięto na osiem prostokątów, z których każdy ma cztery boki o całkowitych długościach. Wykaż, że pewne dwa z tych ośmiu prostokątów mają równe pola.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny podział kwadratu 6×6 na osiem prostokątów o obydwu wymiarach będących liczbami całkowitymi. Boki każdego z uzyskanych prostokątów są równoległe do boków wyjściowego kwadratu i w nim zawarte, wobec czego ich długości są nie większe od 6. Ponadto skoro każdy prostokąt uzyskany w podziale ma boki całkowitej długości, to pole tego prostokąta również wyraża się liczbą całkowitą.

Przypuśćmy, że pola ośmiu uzyskanych prostokątów są parami różne, tzn. żadne dwa prostokąty nie mają równych pól. Oznaczmy pola tych prostokątów przez P_1, P_2, ..., P_8 w taki sposób, że $P_1<P_2<\ldots<P_8$. Skoro są to liczby całkowite, to $P_1\geqslant 1$, $P_2\geqslant 2$, ..., $P_8\geqslant 8$. Ponadto suma tych ośmiu pól jest równa polu całego kwadratu 6×6, czyli 36. Zatem

$$36=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8\geqslant 1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

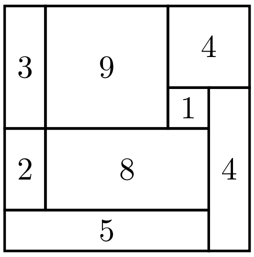
Skoro w otrzymanej nierówności w istocie zachodzi równość, to także wszystkie nierówności $P_1 \geqslant 1$, $P_2 \geqslant 2$, …, $P_8 \geqslant 8$ stają się równościami. Mamy więc w szczególności $P_7 = 7$.

Ponieważ 7 jest liczbą pierwszą, więc jedynym możliwym rozmiarem prostokąta o czterech bokach całkowitych i polu 7 jest 1×7. Jednak takiego prostokąta, jak zauważyliśmy na początku rozwiązania, nie można uzyskać w podziale wyjściowego kwadratu, gdyż $7 > 6$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwy podział, w którym każde dwa z ośmiu prostokątów mają różne pola. Zatem pewne pole się powtarza, co należało wykazać.

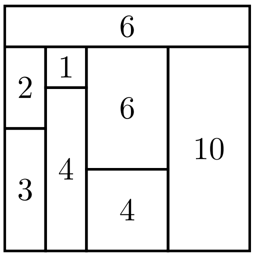
Uwagi

Z pomocą komputera można sprawdzić, że liczba różnych podziałów kwadratu 6×6 na prostokąty o bokach całkowitej długości jest równa dokładnie 2 632 310.

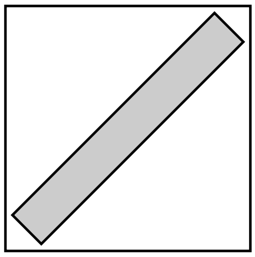
Kwadrat 6×6 *można* rozciąć na osiem prostokątów o całkowitej długości, z których żadne dwa nie są *przystające*. Przykładowe rozcięcia o tej własności przedstawione są poniżej (rys. 1 oraz rys. 2; wewnątrz każdego prostokąta widnieje jego pole).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Prostokąt o wymiarach 1×7 *można umieścić* w kwadracie 6×6 (np. tak, jak na rysunku 3), ale wyłącznie „po skosie". Taki prostokąt nie jest jednak częścią żadnego podziału na osiem prostokątów o wymiarach całkowitych.

---

3. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt P leży na odcinku AC, przy czym

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB.$$

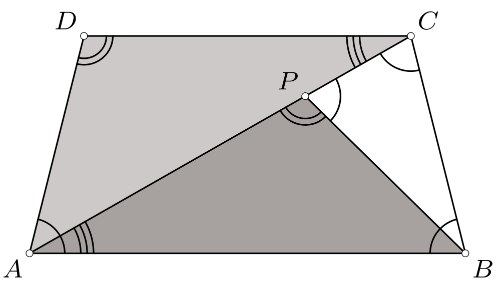
Wykaż, że $AP = CD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro $ABCD$ jest trapezem, to $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ (rys. 4). Ponadto z warunków zadania wynika, że

$$\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC.$$



rys. 4

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Wreszcie skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, to $AB = AC$. W takim razie uzyskane równości

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle ACD, \quad \sphericalangle APB = \sphericalangle ADC \quad \text{oraz} \quad AB = AC$$

pozwalają wnioskować, że trójkąty ABP oraz CAD są przystające (cecha kąt–bok–kąt) i w konsekwencji $AP = CD$.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że z warunku $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ wynika, że $AB = AC$.

Skoro $\sphericalangle BPC = \sphericalangle PCB$, to $BP = BC$. Ponadto skoro $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$, to trapez $ABCD$ jest równoramienny i w konsekwencji $BC = AD$. To oznacza, że $BP = AD$ (rys. 5).

Wreszcie odnotujmy, że

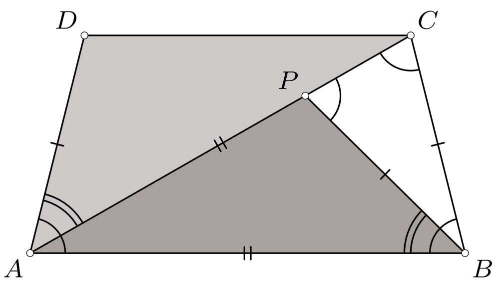
$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle BAP = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAP,$$

skąd wniosek, że $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CAD$.

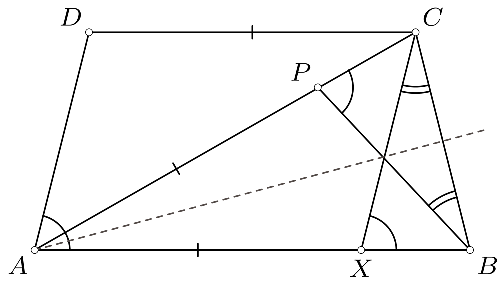
Z uzyskanych równości

$$AB = AC, \quad BP = AD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABP = \sphericalangle CAD$$

wynika, że trójkąty ABP oraz CAD są przystające (cecha bok–kąt–bok). Zatem $AP = CD$.



rys. 5



rys. 6

Sposób III

Skoro $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ są równymi kątami w trójkącie ABC, to są to kąty ostre, skąd $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC < 90^\circ$. W takim razie $AB > CD$.

Oznaczmy przez X taki punkt leżący na odcinku AB, że $AX = CD$ (rys. 6). Skoro odcinki AX i CD są równe i równoległe, to czworokąt $AXCD$ jest równoległobokiem. W szczególności $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BAD$.

Zauważmy, że punkty P oraz X są zbudowane na ramionach trójkąta równoramiennego ABC w symetryczny sposób, gdyż

$$\sphericalangle XCB = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ABC = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BCA = \sphericalangle PBC.$$

Wobec tego X oraz P są punktami symetrycznymi względem osi symetrii trójkąta ABC połowiącej odcinek BC, skąd $AX = AP$. W połączeniu z równością $AX = CD$ uzyskujemy tezę zadania.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

4. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$. Odcinki KL, MN, LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach. Udowodnij, że odcinki KL, MN, KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

Rozwiązanie

Przez $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

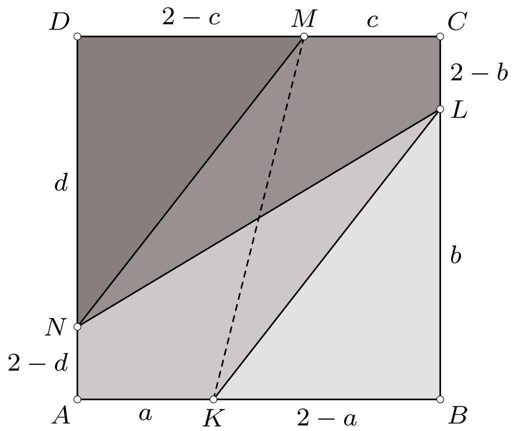
Zauważmy, że części podziału DMN oraz BKL są wspólne dla podziału kwadratu odcinkami KL, MN, LN oraz dla podziału kwadratu odcinkami KL, MN, KM. Skoro

$$[DMN]=[BKL]=\tfrac{1}{4}[ABCD],$$

to zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że odcinek KM dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach — wyniknie stąd, że również $[ANMK]=[CMKL]=\frac{1}{4}[ABCD]$.

Sposób I

Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że bok kwadratu $ABCD$ ma długość 2. Przyjmijmy oznaczenia $AK=a$, $BL=b$, $CM=c$, $DN=d$. Wówczas $BK=2-a$, $CL=2-b$, $DM=2-c$, $AN=2-d$ (rys. 7).



rys. 7

Z warunków zadania oraz wzoru na pole trapezu wynika, że

$$\tfrac{1}{2}\cdot(AN+BL)\cdot AB=[ABLN]=[AKLN]+[BKL]=2\cdot\tfrac{1}{4}[ABCD]=$$
$$=[CMNL]+[DMN]=[CDNL]=\tfrac{1}{2}\cdot(CL+DN)\cdot CD,$$

czyli $(2-d)+b=AN+BL=CL+DN=(2-b)+d$. Stąd mamy $2b=2d$ i w konsekwencji $b=d$. Ponadto

$$\tfrac{1}{2}\cdot DM\cdot DN=[DMN]=\tfrac{1}{4}[ABCD]=[BKL]=\tfrac{1}{2}\cdot BK\cdot BL,$$

skąd $(2-c)d=(2-a)b$. Skoro $b=d$, to z ostatniej równości otrzymujemy $2-c=2-a$ i w konsekwencji $a=c$. Pozostaje zauważyć, że w takim razie

$$[AKMD]=\tfrac{1}{2}\cdot(AK+DM)\cdot AD=\tfrac{1}{2}\cdot(a+2-c)\cdot 2=a+2-c=2=\tfrac{1}{2}[ABCD],$$

czyli istotnie odcinek KM dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach.

Uwaga

Każde rozmieszczenie punktów K, L, M, N spełniające założenia zadania odpowiada czwórce $(a,b,c,d)=(a,\frac{2}{2-a},a,\frac{2}{2-a})$ dla pewnej liczby a spełniającej nierówności $0\leqslant a\leqslant 1$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Sposób II

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

Jeżeli pewna figura wypukła $\mathcal{F}$ ma środek symetrii S, to każda prosta dzieląca $\mathcal{F}$ na dwie figury o równych polach przechodzi przez S.

Aby uzasadnić tę obserwację wystarczy zauważyć, że proste przechodzące przez S w istocie połowią pole figury $\mathcal{F}$, bo dzielą ją na dwie figury przystające, a ponadto w każdym kierunku jest dokładnie jedna prosta połowiąca pole $\mathcal{F}$, tzn. jeżeli proste k i ℓ są równoległe i obie dzielą $\mathcal{F}$ na dwie figury o równych polach, to $k=\ell$.

Przechodzimy do rozwiązania. Oznaczmy przez S środek symetrii kwadratu $ABCD$.

Z treści zadania wynika, że prosta LN dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach, więc punkt S leży na tej prostej, a punkty L i N są względem niego symetryczne. Wobec tego $BL=DN$.

Ponieważ trójkąty BKL oraz DMN są prostokątne i mają równe pola, więc

$$\tfrac{1}{2}\cdot BK\cdot BL=\tfrac{1}{2}\cdot DM\cdot DN.$$

W świetle równości $BL=DN$ mamy więc $BK=DM$. To zaś oznacza, że punkty K i M są symetryczne względem S, czyli prosta KM dzieli kwadrat na dwie figury o równych polach.

Uwaga

Teza zadania pozostaje spełniona, jeżeli założenie, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem osłabimy do założenia, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Rozwiązanie tak zmodyfikowanego zadania może przebiegać podobnie jak drugi z omówionych wyżej sposobów — należy tylko użyć innego argumentu do uzasadnienia równości $BK=DM$ (np. uzasadnić przystawanie trójkątów BKL oraz DMN na podstawie równości $[BKL]=[DMN]$, $BL=DN$, $\sphericalangle KBL=\sphericalangle MDN$, czyli swoistej cechy przystawania „bok–kąt–pole").

---

5. Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czterysta z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czterysta — żółtą. Wykaż, że można zmazać pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

Uwaga. Liczby na tablicy mogą się powtarzać.

Rozwiązanie

Skoro każda liczba napisana na tablicy jest jedną z dwudziestu kolejnych liczb: 1, 2, …, 20, to istnieje liczba a, która została napisana na niebiesko co najmniej 20 razy. Rzeczywiście, gdyby każda z liczb od 1 do 20 wystąpiła wśród liczb niebieskich mniej niż 20 razy, to łącznie na tablicy byłoby mniej niż $20\cdot 20=400$ niebieskich liczb — sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że istnieje liczba b, która została napisana na żółto co najmniej 20 razy.

Jeżeli z tablicy zmażemy wszystkie liczby oprócz b niebieskich wystąpień liczby a oraz oprócz a żółtych wystąpień liczby b, to uzyskamy sytuację o pożądanej w tezie zadania własności. Suma pozostawionych liczb niebieskich będzie równa sumie pozostawionych liczb żółtych — obie będą równe $a\cdot b$.

Uwaga

Do poprawności przedstawionego powyżej rozumowania wystarczy, jeśli liczb w obydwu kolorach jest po $381=19\cdot 20+1$ zamiast po 400.

Okazuje się, że założenia zadania można znacznie bardziej osłabić. Teza zadania pozostaje prawdziwa nawet wówczas, gdy początkowo na tablicy znajduje się *po dwadzieścia* liczb każdego koloru.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej