XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(16 marca 2024 r.)

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taki czworokąt wypukły $ABCD$, we wnętrzu którego można wskazać punkt P spełniający warunki

$$AB = AP, \quad BC = BP, \quad CD = CP, \quad DA = DP.$$

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od 180°.

2. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 1$ o tej własności, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na kwadratowe części o wymiarach 1×1 lub 2×2 w taki sposób, aby uzyskać po tyle samo części każdego z tych dwóch rodzajów.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ oraz $c+a \neq 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{a^2c}{a+b}+\frac{b^2a}{b+c}+\frac{c^2b}{c+a}\right)\cdot\left(\frac{b^2c}{a+b}+\frac{c^2a}{b+c}+\frac{a^2b}{c+a}\right) \geqslant 0.$$

4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA tego trójkąta, przy czym czworokąt $CQPR$ jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

5. Niech $S = \underbrace{111\ldots1}_{19}\underbrace{999\ldots9}_{19}$. Wykaż, że liczba $2S$-cyfrowa

$$\underbrace{11111\ldots111}_{S}\underbrace{99999\ldots999}_{S}$$

jest podzielna przez 19.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej