XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (16 marca 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taki czworokąt wypukły $ABCD$, we wnętrzu którego można wskazać punkt P spełniający warunki

$$AB = AP, \quad BC = BP, \quad CD = CP, \quad DA = DP.$$

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od 180°.

Rozwiązanie

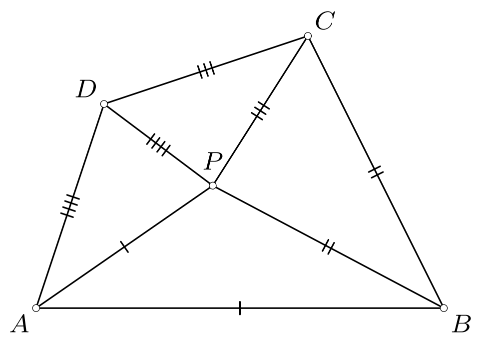
Odpowiedź: Taki czworokąt $ABCD$ *nie* istnieje.

Sposób I

Przypuśćmy, że czworokąt $ABCD$ oraz punkt P spełniają warunki zadania (rys. 1). To oznacza, że kąty

$$APB, \quad BPC, \quad CPD, \quad DPA$$

są ostre, gdyż są to kąty między podstawą a ramieniem odpowiednio w trójkątach równoramiennych ABP, BCP, CDP, DAP. Stąd wnioskujemy, że



rys. 1

$$360^\circ = \sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją punkty A, B, C, D, P o żądanej własności.

Sposób II

Gdyby czworokąt $ABCD$ oraz punkt P spełniały warunki zadania, to z danych równości odcinków uzyskalibyśmy

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle APB, \quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle BPC, \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle CPD, \quad \sphericalangle DAP = \sphericalangle DPA.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle BCP + \sphericalangle CDP + \sphericalangle DAP = \sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA = 360^\circ.$$

Z drugiej strony, skoro punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, to

$$\sphericalangle ABP < \sphericalangle ABC, \quad \sphericalangle BCP < \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle CDP < \sphericalangle CDA, \quad \sphericalangle DAP < \sphericalangle DAB,$$

a zatem, ponieważ suma miar kątów wewnętrznych czworokąta to 360°, otrzymujemy

$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle BCP + \sphericalangle CDP + \sphericalangle DAP < \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 360^\circ.$$

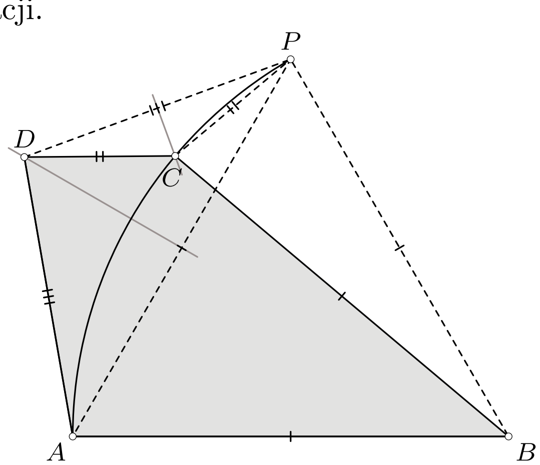
Uzyskana nierówność stoi w sprzeczności z otrzymaną wcześniej równością, co oznacza, że układ punktów A, B, C, D, P spełniający warunki zadania nie istnieje.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Uwaga

Przykładem *wielokąta* wypukłego, w którego wnętrzu istnieje punkt o analogicznej do prezentowanej w treści zadania własności jest sześciokąt foremny (i jego środek).

Można także wskazać czworokąt wypukły $ABCD$ oraz punkt P leżący *na zewnątrz* tego czworokąta, dla których spełnione są warunki z treści zadania. Opiszemy jedną z możliwych konstrukcji takiej konfiguracji.



rys. 2

Niech ABP będzie trójkątem równobocznym (rys. 2). Punkt D wybierzmy na symetralnej odcinka AP w taki sposób, że $\sphericalangle DAB \geqslant 90°$ oraz $\sphericalangle ADP \geqslant 90°$. Punkt C zaś zdefiniujmy jako punkt przecięcia symetralnej odcinka DP z tym łukiem okręgu o środku B i promieniu $BP = AB$, który znajduje się wewnątrz trójkąta ADP. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że dla tak określonych punktów spełnione są równości $AB = AP$, $BC = BP$, $CD = CP$, $DA = DP$.

---

2. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 1$ o tej własności, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na kwadratowe części o wymiarach 1×1 lub 2×2 w taki sposób, aby uzyskać po tyle samo części każdego z tych dwóch rodzajów.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą o opisanej własności jest $n = 10$.

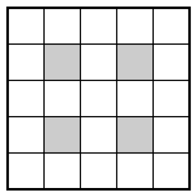
Sposób I

Załóżmy, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na $2k$ części, wśród których jest k kwadratów 1×1 oraz k kwadratów 2×2, gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Łączne pole wszystkich części jest równe polu całego kwadratu:

$$k \cdot 1^2 + k \cdot 2^2 = n^2, \quad \text{czyli} \quad 5k = n^2.$$

Stąd wniosek, że n jest liczbą podzielną przez 5.

Udowodnimy, że kwadratu 5×5 nie można rozciąć na 5 części 2×2 oraz 5 części 1×1. Istotnie, gdyby takie rozcięcie było możliwe, każda z tych dziesięciu części składałaby się z całych jednostkowych pól widocznych na rysunku 3. Zauważmy, że każdy kwadrat 2×2 złożony z całych pól zawiera dokładnie jedno pole wyróżnione. Skoro wyróżnione pola są tylko cztery, to łącznie mogą należeć do co najwyżej czterech części 2×2, co przeczy założeniu, że takich części jest pięć. Zatem szukana najmniejsza liczba n jest różna od 5.



rys. 3

Dla $n = 10$ istnieje żądany podział: kwadrat 10×10 można rozciąć na 20 kwadratów 2×2 oraz 20 kwadratów 1×1. Przykładowe rozcięcie o tej własności przedstawione jest na rysunku 4.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

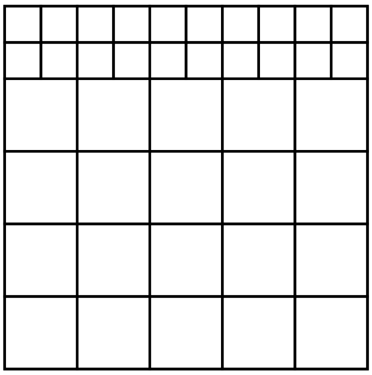
Ministerstwo Edukacji Narodowej

Sposób II

Podamy inny dowód faktu, że kwadratu 5×5 nie można rozciąć na 5 kwadratów 2×2 oraz 5 kwadratów 1×1 (pozostałe elementy rozwiązania są jednakowe jak w poprzednim sposobie).

Przypuśćmy, że takie rozcięcie jest możliwe i 20 pól należących do pięciu części 2×2 pomalujmy na biało, a 5 pól należących do pięciu części 1×1 — na czarno. Zauważmy, że w każdym wierszu kwadratu 5×5 jest parzysta liczba białych pól (dwa razy więcej niż części 2×2 o polach w tym wierszu). To oznacza, że w każdym wierszu jest *co najmniej* jedno czarne pole. Skoro zaś łączna liczba czarnych pól w całym kwadracie jest równa 5, to w każdym wierszu jest *dokładnie* jedno czarne pole.

Analogicznie uzasadniamy, że w każdej kolumnie jest dokładnie jedno czarne pole. Rozważmy czarne pole P_2, które znajduje się w *drugiej* kolumnie. Sąsiadujące z nim pole pierwszej kolumny P_1 jest białe (bo P_2 jest jedynym czarnym polem w swoim wierszu). Jednak P_1 nie może należeć do kwadratowej części 2×2, gdyż każdy kwadrat 2×2 zawierający P_1 zawiera również P_2. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.



rys. 4

Uwaga

Możliwych rozmieszczeń czterech nie nachodzących na siebie kwadratów 2×2 (złożonych z całych pól) wewnątrz kwadratu 5×5 jest 79. Poprawny argument, że piąty kwadrat 2×2 nigdy się „nie zmieści”, polegający na rozpatrywaniu różnych przypadków, powinien uwzględniać te wszystkie rozmieszczenia.

---

3. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b\neq0$, $b+c\neq0$ oraz $c+a\neq0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{a^2c}{a+b}+\frac{b^2a}{b+c}+\frac{c^2b}{c+a}\right)\cdot\left(\frac{b^2c}{a+b}+\frac{c^2a}{b+c}+\frac{a^2b}{c+a}\right)\geqslant 0.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Udowodnimy, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunki zadania, zachodzi równość

$$\frac{a^2c}{a+b}+\frac{b^2a}{b+c}+\frac{c^2b}{c+a}=\frac{b^2c}{a+b}+\frac{c^2a}{b+c}+\frac{a^2b}{c+a}.$$

Wyniknie stąd bezpośrednio teza zadania, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej (w szczególności: wspólnej wartości obu stron powyższej równości) jest liczbą nieujemną.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Aby wykazać postulowaną równość, wystarczy zauważyć, że różnica lewej i prawej strony jest równa zero:

$$\begin{aligned}\frac{a^2c}{a+b}-\frac{b^2c}{a+b}+\frac{b^2a}{b+c}-\frac{c^2a}{b+c}+\frac{c^2b}{c+a}-\frac{a^2b}{c+a}&=\frac{(a^2-b^2)c}{a+b}+\frac{(b^2-c^2)a}{b+c}+\frac{(c^2-a^2)b}{c+a}=\\&=\frac{(a-b)(a+b)c}{a+b}+\frac{(b-c)(b+c)a}{b+c}+\frac{(c-a)(c+a)b}{c+a}=\\&=(a-b)c+(b-c)a+(c-a)b=ca-bc+ab-ca+bc-ab=0.\end{aligned}$$

Uwaga

W pełni analogicznie można udowodnić podobną równość, spełnioną dla każdej trójki liczb rzeczywistych x, y, z, z których żadne dwie nie są przeciwne:

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}=\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}.$$

W istocie powyższa równość staje się równością z rozwiązania w wyniku podstawienia $x=ca$, $y=bc$, $z=ab$.

Sposób II

Sprowadzając wyrażenie stanowiące pierwszy czynnik lewej strony dowodzonej nierówności do wspólnego mianownika, a następnie wymnażając i porządkując, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\frac{a^2c}{a+b}+\frac{b^2a}{b+c}+\frac{c^2b}{c+a}&=\frac{a^2c(b+c)(c+a)+b^2a(c+a)(a+b)+c^2b(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\\&=\frac{a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+c^3a^2+c^2a^3+ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c+a^3bc+ab^3c+abc^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\\&=\frac{(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)},\end{aligned}$$

czyli wyrażenie symetryczne ze względu na zmienne a, b, c. To samo wyrażenie uzyskamy po przekształceniach drugiego czynnika:

$$\frac{b^2c}{a+b}+\frac{c^2a}{b+c}+\frac{a^2b}{c+a}=\frac{(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

W konsekwencji lewa strona dowodzonej nierówności jest kwadratem pewnej liczby rzeczywistej, czyli liczbą nieujemną.

---

4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA tego trójkąta, przy czym czworokąt $CQPR$ jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie

Bezpośrednio z warunków zadania wynika, że $PQ=CR$ oraz $PR=CQ$. Ponadto, skoro proste PR i BC są równoległe, to $\sphericalangle APR=\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC$, więc trójkąt APR jest równoramienny i $AR=PR$. Podobnie stwierdzamy, że trójkąt BPQ jest równoramienny i $BQ=PQ$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Oznaczmy przez P' punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR. Jeżeli P jest środkiem odcinka AB, to $P'=C$ i teza zadania jest spełniona. W dalszej części będziemy zakładać, że $AP \neq BP$.

Sposób I

Zauważmy, że skoro P' jest punktem symetrycznym do P względem QR, to trójkąty PQR oraz $P'QR$ są przystające (rys. 5). Skoro $CQPR$ jest równoległobokiem, to również trójkąty CRQ i PQR są przystające. W konsekwencji trójkąty $P'QR$ oraz CRQ są przystające, skąd

$$\sphericalangle P'QC = \sphericalangle P'QR - \sphericalangle CQR = \sphericalangle CRQ - \sphericalangle P'RQ = \sphericalangle P'RC.$$

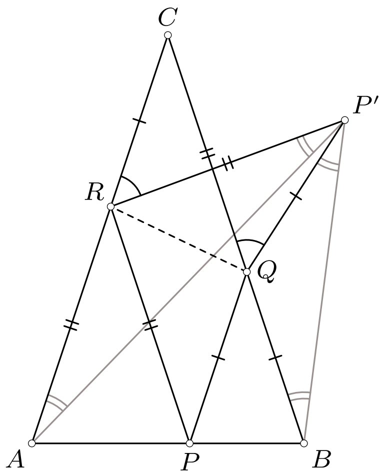
Ponadto skoro trójkąty BQP' i ARP' są równoramienne, to

$$\sphericalangle P'QC = 180^\circ - \sphericalangle BQP' = 2 \cdot \sphericalangle P'BQ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle P'RC = 180^\circ - \sphericalangle ARP' = 2 \cdot \sphericalangle P'AR.$$

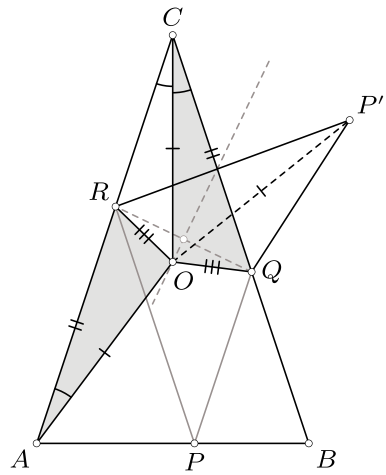
Z uzyskanych równości wynika więc, że

$$\sphericalangle P'BC = \sphericalangle P'BQ = \tfrac{1}{2}\sphericalangle P'QC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle P'RC = \sphericalangle P'AR = \sphericalangle P'AC,$$

co w połączeniu z faktem, że punkty C oraz P' leżą po tej samej stronie prostej AB oznacza, że punkty A, B, C, P' leżą na jednym okręgu.



rys. 5



rys. 6

Sposób II

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 6).

Skoro $OA = OC$, $AR = CQ$ oraz

$$\sphericalangle OAR = \sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OCQ,$$

to trójkąty OAR oraz OCQ są przystające. Wobec tego $OQ = OR$, czyli punkt O leży na symetralnej odcinka QR.

Punkt P jest obrazem punktu C w symetrii względem środka odcinka QR, a punkt P' jest obrazem punktu P w symetrii względem prostej QR. To oznacza, że punkt P' jest obrazem punktu C w symetrii względem symetralnej odcinka QR. Innymi słowy: symetralna odcinka CP' jest również symetralną odcinka QR.

Połączenie konkluzji ostatnich dwóch akapitów prowadzi do wniosku, że punkt O leży na symetralnej odcinka CP', czyli $OC = OP'$. To zaś oznacza, że punkt P' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

5. Niech $S=\underbrace{111\ldots1}_{19}\underbrace{999\ldots9}_{19}$. Wykaż, że liczba $2S$-cyfrowa

$$\underbrace{11111\ldots111}_{S}\underbrace{99999\ldots999}_{S}$$

jest podzielna przez 19.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\underbrace{11111\ldots111}_{S}\underbrace{99999\ldots999}_{S}=\underbrace{11111\ldots111}_{S}\cdot1\underbrace{00000\ldots00}_{S-1}9,$$

wobec czego należy wykazać, że co najmniej jeden z tych dwóch czynników jest podzielny przez 19. Ponadto drugi czynnik można przedstawić w postaci

$$1\underbrace{00000\ldots00}_{S-1}9=19+\underbrace{99999\ldots99}_{S-1}0=19+90\cdot\underbrace{11111\ldots11}_{S-1}.$$

Ponieważ 90 nie jest liczbą podzielną przez 19, więc powyższa suma jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

$$\underbrace{11111\ldots11}_{S-1}$$

jest podzielna przez 19. Jak widać, do zakończenia rozwiązania przydatne będzie rozstrzygnięcie, jakie liczby o zapisie dziesiętnym złożonym wyłącznie z jedynek są podzielne przez 19.

Oznaczmy przez J_n liczbę n-cyfrową, której każdą cyfrą jest 1, czyli

$$J_n=\underbrace{11111\ldots11}_{n}=\tfrac{1}{9}\cdot\underbrace{99999\ldots99}_{n}=\tfrac{1}{9}(10^n-1).$$

Udowodnimy następujący fakt:

Jeżeli liczba n jest podzielna przez 18, *to liczba J_n jest podzielna przez* 19.

Zauważmy, że wykorzystując powyższy fakt, można zakończyć rozwiązanie zadania. Istotnie, ponieważ liczba $S-1$ jest podzielna przez 18. (jako liczba parzysta o sumie cyfr podzielnej przez 9), więc liczba J_{S-1} (która, jak zauważyliśmy wcześniej, jest dzielnikiem liczby danej w treści zadania) dzieli się przez 19.

Przytoczony fakt udowodnimy kilkoma sposobami.

Sposób I

Wykonując pisemne dzielenie z resztą przez 19 liczby złożonej z samych jedynek (rys. 7), zauważamy, że reszta 0 pojawia się po raz pierwszy dla liczby J_{18}. Wykonując takie dzielenie dla większych liczb tej postaci, będziemy okresowo otrzymywać ten sam ciąg reszt, przy czym reszta 0 będzie pojawiała się za co osiemnastym razem, czyli wyłącznie dla liczb J_n, gdzie n dzieli się przez 18.

Uwaga 1.

W istocie udowodniliśmy więc mocniejszy rezultat niż powyższy fakt: liczba J_n dzieli się przez 19 wtedy *i tylko wtedy*, gdy liczba n dzieli się przez 18.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

$$
\begin{array}{l}
5847953216374269\\
\overline{111111111111111111} : 19\\
\underline{-95}\\
161\\
\underline{-152}\\
91\\
\underline{-76}\\
151\\
\underline{-133}\\
181\\
\underline{-171}\\
101\\
\underline{-95}\\
61\\
\underline{-57}\\
41\\
\underline{-38}\\
31\\
\underline{-19}\\
121\\
\underline{-114}\\
71\\
\underline{-57}\\
141\\
\underline{-133}\\
81\\
\underline{-76}\\
51\\
\underline{-38}\\
131\\
\underline{-114}\\
171\\
\underline{-171}\\
0
\end{array}
$$

rys. 7

Sposób II

Ponieważ $J_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$, więc liczba J_n dzieli się przez 19 dokładnie wtedy, gdy liczba 10^n daje przy dzieleniu przez 19 resztę 1. Wyznaczając reszty z dzielenia przez 19 kolejnych potęg 10, uzyskujemy, że liczby 10^1, 10^2, 10^3, … dają przy dzieleniu przez 19 kolejno reszty:

$$10,\ 5,\ 12,\ 6,\ 3,\ 11,\ 15,\ 17,\ 18,\ 9,\ 14,\ 7,\ 13,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

i dalej okresowo (z okresem 18). To oznacza, że 10^n daje przy dzieleniu przez 19 resztę 1 wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli się przez 18.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Uwaga 2.

Odnotujmy, że przedstawiony cykl reszt z dzielenia potęg 10 przez 19 można wyznaczyć nie wykonując rachunków na liczbach większych od dwucyfrowych. Rzeczywiście, jeśli liczba 10^n daje przy dzieleniu przez 19 parzystą resztę $r=2k$, to

$$10^{n+1}=10\cdot 10^n \equiv_{19} 10\cdot 2k=20k=19k+k\equiv_{19} k=\frac{r}{2},$$

gdzie zapis $a\equiv_{19} b$ oznacza, że liczby a oraz b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 19. Krótko mówiąc, aby wyznaczyć resztę w kolejnym kroku, parzyste reszty wystarczy dzielić przez 2. Z kolei jeżeli 10^n daje przy dzieleniu przez 19 nieparzystą resztę $r=2k+1$, to

$$10^{n+1}=10\cdot 10^n \equiv_{19} 10\cdot(2k+1)=20k+10=19k+k+10\equiv_{19} k+10=\frac{2k+1+19}{2}=\frac{r+19}{2}.$$

W tym wypadku wystarczy więc dodać do nieparzystej reszty 19 i podzielić przez 2.

Sposób III

Ponieważ 19 jest liczbą pierwszą, więc wykorzystując *małe twierdzenie Fermata* stwierdzamy, że dla każdej liczby całkowitej n niepodzielnej przez 19, liczba n^{18} daje resztę 1 przy dzieleniu przez 19. W szczególności przyjmując $n=10^k$, otrzymujemy, że każda liczba postaci $10^{18k}-1$ jest podzielna przez 19, więc w konsekwencji także liczba $J_{18k}=\frac{1}{9}(10^{18k}-1)$.

Sposób IV

Zauważmy, że wystarczy uzasadnić, że liczba J_{18} jest podzielna przez 19, gdyż dla dowolnej liczby całkowitej $k\geqslant 1$:

$$J_{18k}=J_{18}\cdot 1\underbrace{000\ldots00}_{17}1\underbrace{000\ldots00}_{17}1\underbrace{000\ldots00}_{17}1\ldots1\underbrace{000\ldots00}_{17}1,$$

przy czym liczba cyfr równych 1 w drugim czynniku jest równa k. Zauważmy, że

$$J_{18}=111111111111111111=1000000001\cdot 111111111=(10^9+1)\cdot J_9.$$

Z kolei wykorzystując rozkład sumy sześcianów $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, liczbę 10^9+1 można przedstawić w postaci iloczynu:

$$10^9+1=(10^3)^3+1^3=(10^3+1)(10^6-10^3+1)=1001\cdot 999001.$$

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że $999001=19\cdot 52579$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej