Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna
(1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, dla których
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x+y?$$
Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Dla każdej liczby rzeczywistej x, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geqslant x$. Wobec tego
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}>x+y\,,$$
a zatem nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

---

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt D leży na boku AB, przy czym $BD=2AD$, a kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta BAC.

Szkic rozwiązania

Niech E będzie środkiem przeciwprostokątnej DB trójkąta prostokątnego DBC. Wówczas punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DBC, a więc $DE=CE$. Z kolei trójkąt ABC ma oś symetrii, przechodzącą przez wierzchołek C, a punkty D i E są względem niej symetryczne. Zatem $CD=CE$. Wobec tego trójkąt DEC jest równoboczny, a więc $\sphericalangle CDE=60^\circ$. Wówczas $\sphericalangle DBC=30^\circ$, skąd $\sphericalangle BAC=30^\circ$.

---

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

Szkic rozwiązania

Rozważmy prostokąt o bokach a, b oraz przekątnej d. Oznaczmy przez S i L odpowiednio pole i obwód tego prostokąta, czyli $S=ab$ oraz $L=2(a+b)$. Zauważmy, że
$$d^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\left(\frac{L}{2}\right)^2-2S\,.$$
Wobec tego długości przekątnych danych prostokątów są równe.

---

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że istnieje podział opisany w treści zadania. Oznaczmy dane liczby przez $x_1,x_2,\ldots,x_{99}$ w taki sposób, że $x_1\cdot\ldots\cdot x_k=x_{k+1}\cdot\ldots\cdot x_{99}$. Wówczas $x_1\cdot\ldots\cdot x_{99}=(x_1\cdot\ldots\cdot x_k)^2$.

Suma cyfr każdej z liczb $x_1,x_2,\ldots,x_{99}$ jest równa 50, a więc każda z nich daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Wobec tego $x_1\equiv x_2\equiv\ldots\equiv x_{99}\equiv -1 \pmod 3$, skąd
$$x_1\cdot\ldots\cdot x_{99}\equiv(-1)^{99}=-1 \pmod 3\,.$$
Z drugiej strony
$$(x_1\cdot\ldots\cdot x_k)^2\equiv(-1)^{2k}=1 \pmod 3\,.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu użyliśmy kongruencji i ich własności. Czytelników, którym to pojęcie nie jest znane, polecamy lekturę broszury *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Dodatek, str. 33.

---

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L odpowiednio środki odcinków AC i CE. Ponieważ punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC, więc $BK = \frac{1}{2}AC$. Podobnie uzasadniamy, że $LD = \frac{1}{2}CE$. Ponadto $KL = \frac{1}{2}AE$.

Z nierówności trójkąta wynika, że $BK+KL+LD \geqslant BD$. A zatem $AC+CE+AE \geqslant 2BD$.

---

6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b, dla których liczba

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ także są wymierne.

Szkic rozwiązania

Niech $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}=x$. Wówczas $\sqrt{b}+\sqrt{ab}=x-\sqrt{a}$. Podnosząc tę równość stronami do kwadratu, uzyskujemy

$$b+2b\sqrt{a}+ab = x^2-2x\sqrt{a}+a\,.$$

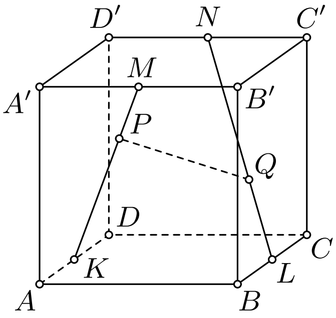
Stąd wynika, że

$$\sqrt{a} = \frac{x^2+a-b-ab}{2(b+x)}\,.$$

Wobec tego liczba $\sqrt{a}$ jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Analogicznie wykazujemy, że liczba $\sqrt{b}$ jest wymierna.

---

7. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami krawędzi AD, BC, $A'B'$, $C'D'$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach KM i LN. Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że $PQ \geqslant \sqrt{2}$.



Szkic rozwiązania

Niech P', Q', M', N' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P, Q, M, N na płaszczyznę $ABCD$. Wówczas proste KM' oraz LN' są równoległe, a ich odległość jest równa $\sqrt{2}$. Stąd wynika, że $PQ \geqslant P'Q' \geqslant \sqrt{2}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego