VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

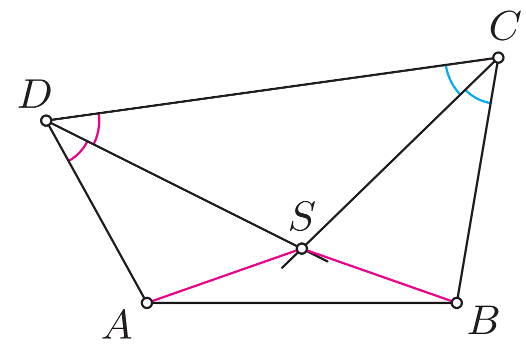
Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 29 października 2012 r.)

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.



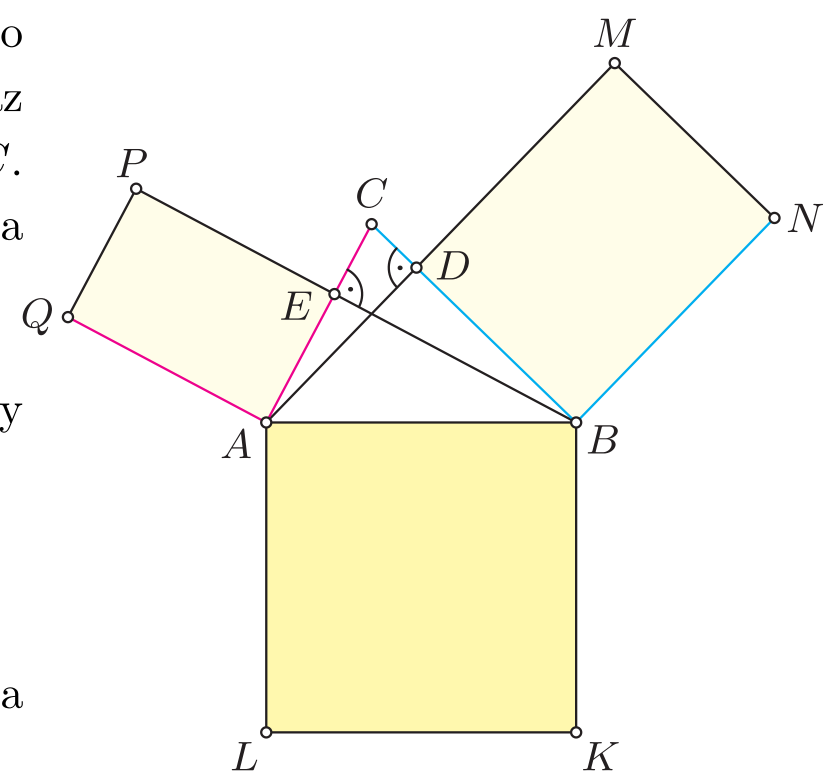
Zadanie 2.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że $AS=BS$.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN=BC$ oraz $AQ=AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.



Zadanie 5.

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB+\sphericalangle CSD=\sphericalangle BSC+\sphericalangle DSA.$$

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba n^3-7n jest kwadratem liczby całkowitej.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego