XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2015/16)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 12 października 2015 r.)

---

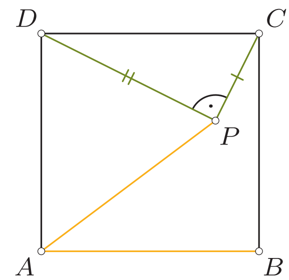
1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x,y,z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y-z)+y(z-x)=6\,.$$

2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że

$$AP=AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD=90^\circ\,.$$

Wykaż, że $DP=2\cdot CP$.



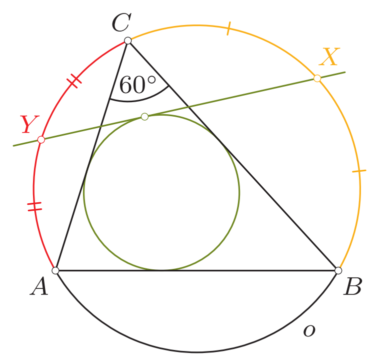
Zadanie 2

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba

$$\frac{n^4+4}{17}$$

jest pierwsza.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg o. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A, a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o, który nie zawiera punktu B. Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.



Zadanie 4

5. W wierzchołkach n-kąta foremnego rozmieszczono liczby $1,2,\ldots,n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdych trzech kolejnych wierzchołkach n-kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste p i q mają tę własność, że liczba p^2+p jest podzielna przez q^2+q. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p-q)$ jest złożona.

7. Czy istnieje taki ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS+CS=BS+DS$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 października 2015 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omg.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.