# XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2017 r. – 16 października 2017 r.)

## Szkice rozwiązań zadań konkursowych

**1.** Liczby $a$, $b$, $c$ spełniają zależności

$$3a+4b=3c \quad \text{oraz} \quad 4a-3b=4c.$$

Wykaż, że $a^2+b^2=c^2$.

*Szkic rozwiazania*

*Sposób* I

Mnożąc obie strony pierwszej równości przez 4, a drugiej przez 3, uzyskujemy

$$12a+16b=12c \quad \text{oraz} \quad 12a-9b=12c.$$

Odejmując stronami otrzymane zależności, dostajemy $25b=0$, czyli $b=0$. Wobec tego $a=c$ i wówczas $a^2+b^2=a^2=c^2$.

*Sposób* II

Podnosząc dane równości stronami do kwadratu, uzyskujemy

$$9c^2=(3a+4b)^2=9a^2+24ab+16b^2,$$
$$16c^2=(4a-3b)^2=16a^2-24ab+9b^2.$$

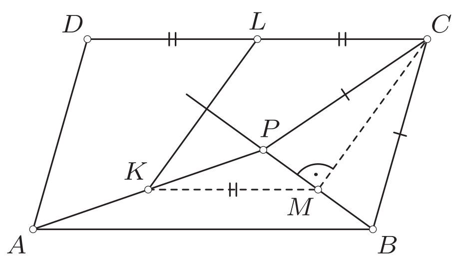
Dodając stronami powyższe zależności, otrzymujemy $25c^2=25a^2+25b^2$, czyli $c^2=a^2+b^2$. To kończy dowód.

**2.** Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ znajduje się taki punkt $P$, że $PC=BC$. Udowodnij, że prosta $BP$ jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków $AP$ i $CD$.

*Szkic rozwiazania*

*Sposób* I

Oznaczmy przez $K$, $L$, $M$ środki odpowiednio odcinków $AP$, $CD$, $BP$ (rys. 1). Wówczas prosta $CM$ jest prostopadła do prostej $BP$ jako wysokość trójkąta równoramiennego $BCP$. Aby rozwiązać zadanie, wystarczy więc udowodnić, że proste $KL$ i $CM$ są równoległe.




rys. 1

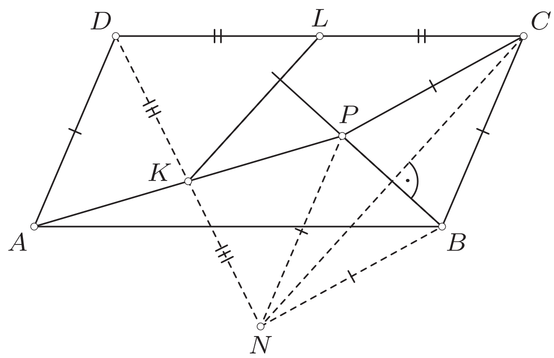
Skoro $KM$ łączy środki dwóch boków $AP$ i $BP$ w trójkącie $ABP$, to $KM=\frac{1}{2}AB$ oraz proste $KM$ i $AB$ są równoległe. Ponadto $LC=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB$ oraz proste $LC$ i $AB$ są równoległe. Łącząc powyższe obserwacje, wnioskujemy, że odcinki $KM$ i $LC$ są równoległe oraz mają równą długość. To oznacza, że czworokąt $KMCL$ jest równoległobokiem. W szczególności proste $KL$ i $CM$ są równoległe, co kończy rozwiązanie zadania.


MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

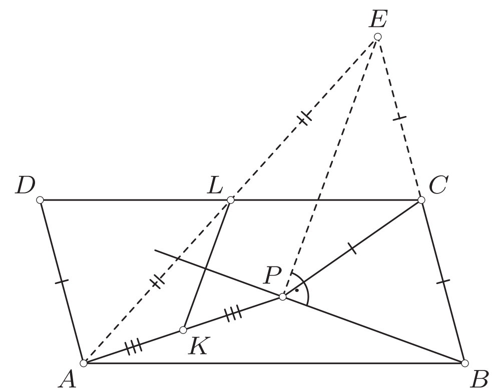
*Sposób* II

Oznaczmy przez $K$ i $L$ środki odpowiednio odcinków $AP$ i $CD$, a przez $N$ taki punkt, że czworokąt $ADPN$ jest równoległobokiem (rys. 2). Wówczas odcinek $KL$ łączy środki boków $ND$ i $CD$ trójkąta $CDN$, wobec czego jest on równoległy do boku $CN$.

Zauważmy, że $BC$ i $AD$ oraz $AD$ i $PN$ to pary odcinków równych i równoległych, wobec czego odcinki $BC$ i $PN$ są równe i równoległe, a zatem czworokąt $BCPN$ jest równoległobokiem. Ponieważ $PC=BC$, więc równoległobok ten jest rombem i w konsekwencji jego przekątne $BP$ i $CN$ są prostopadłe. A ponieważ odcinki $KL$ i $CN$ są równoległe, więc proste $KL$ i $BP$ są prostopadłe, co kończy rozwiązanie zadania.




rys. 2




rys. 3

*Sposób* III

Oznaczmy przez $K$ i $L$ środki odpowiednio odcinków $AP$ i $CD$, a przez $E$ punkt symetryczny do punktu $B$ względem punktu $C$ (rys. 3). Wówczas odcinki $AD$ i $CE$ są równe i równoległe, wobec czego czworokąt $ACED$ jest równoległobokiem. W szczególności punkt $L$, jako środek przekątnej $CD$, jest także środkiem przekątnej $AE$.

W trójkącie $APE$ odcinek $KL$ łączy środki boków $AP$ i $AE$, wobec czego prosta $KL$ jest równoległa do boku $PE$. Co więcej, $BC=PC=CE$, więc punkt $P$ leży na okręgu o średnicy $BE$, a zatem $\sphericalangle BPE=90^\circ$. To kończy rozwiązanie.

*Uwaga*

W przedstawionych rozwiązaniach kluczowe było uzupełnienie rysunku o pewien element pozwalający uchwycić niewidoczne na pierwszy rzut oka zależności. Metodom rozwiązywania zadań geometrycznych w taki sposób poświęcone są artykuły *Dorysujmy środek odcinka*, *Kwadrat* nr 19 (styczeń 2017) oraz *Dorysujmy równoległobok*, *Kwadrat* nr 20 (wrzesień 2017).

---

**3.** Liczby pierwsze $a$, $b$, $c$ są większe od 3. Udowodnij, że liczba

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

jest podzielna przez 48.

*Szkic rozwiazania*

Z warunków zadania wynika, że liczby $a$, $b$, $c$ są nieparzyste i niepodzielne przez 3. W szczególności liczby te mogą dawać tylko reszty 1 i 3 przy dzieleniu przez 4 oraz tylko reszty 1 i 2 przy dzieleniu przez 3.

Ponieważ pewne dwie z liczb $a$, $b$, $c$ dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, więc co najmniej jedna z liczb $a-b$, $b-c$, $c-a$ jest podzielna przez 3. To oznacza, że iloczyn $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest liczbą podzielną przez 3.

---


MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Podobnie, ponieważ pewne dwie z liczb $a$, $b$, $c$ dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4, więc pewna spośród z liczb $a-b$, $b-c$, $c-a$ jest podzielna przez 4. Ponadto wszystkie te liczby są parzyste, więc każda z pozostałych dwóch liczb jest podzielna przez 2. W konsekwencji iloczyn $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest liczbą podzielną przez $4\cdot 2\cdot 2=16$.

Ponieważ liczby 3 i 16 są względnie pierwsze, więc łącząc uzyskane wnioski, otrzymujemy, że liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest podzielna przez $3\cdot 16=48$.

---

**4.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $AB$ i $CD$. Symetralne ramion $AD$ i $BC$ przecinają boki $BC$ i $AD$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Wykaż, że $\sphericalangle APD=\sphericalangle BQC$.

*Szkic rozwiazania*

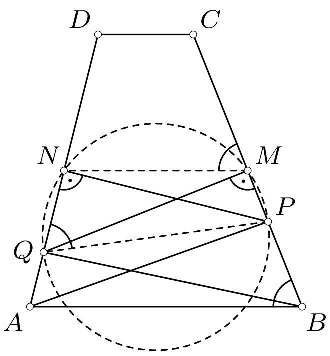
Odnotujmy, że $AP=DP$ oraz $BQ=CQ$, więc trójkąty $APD$ oraz $BQC$ są równoramienne. Wobec tego postulowana równość kątów zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty te są podobne, czyli gdy $\sphericalangle PAD=\sphericalangle QBC$.

Ponieważ punkty $A$ i $B$ leżą po tej samej stronie prostej $PQ$, więc aby zakończyć rozwiązanie, wystarczy wykazać, że na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg.

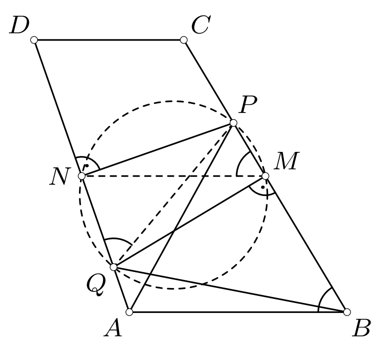
Oznaczmy przez $M$ i $N$ odpowiednio środki ramion $BC$ i $AD$ danego trapezu. Ponieważ $\sphericalangle PMQ=\sphericalangle PNQ=90°$, więc punkty $M$ i $N$ leżą na okręgu o średnicy $PQ$ (również wtedy, gdy $P=M$ lub $Q=N$). Wówczas

$$\sphericalangle CMN=\sphericalangle DQP,$$

niezależnie od tego, czy punkty $M$ i $N$ leżą po tej samej stronie prostej $PQ$ (rys. 4), czy po przeciwnych stronach tej prostej (rys. 5).



rys. 4



rys. 5

Proste $MN$ i $AB$ są równoległe, co w połączeniu z powyższą równością prowadzi do

$$\sphericalangle PBA=\sphericalangle CMN=\sphericalangle DQP=180°-\sphericalangle AQP.$$

Stąd $\sphericalangle PBA+\sphericalangle AQP=180°$, a to oznacza, że na czworokącie wypukłym $ABPQ$ można opisać okrąg. To kończy dowód.

*Uwaga*

W rozwiązaniu korzystaliśmy z następującego twierdzenia: *odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu.* Dowód tej własności można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2016 (wniosek 4.9).

---

**5.** Każdą liczbę całkowitą należy pokolorować na jeden z trzech kolorów, w tym czerwony. Należy to uczynić w taki sposób, by każda liczba, którą można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach miała kolor czerwony. Czy da się zrealizować takie kolorowanie, używając wszystkich trzech kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

---

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

*Szkic rozwiazania*

Przypuśćmy, że kolorowanie zgodne z warunkami zadania jest możliwe. To oznacza, że istnieją liczby całkowite $a$, $b$, $c$, z których każde dwie mają inny kolor.

Liczba 0 ma ten sam kolor co jedna z liczb $a$, $b$, $c$. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że 0 ma ten sam kolor co $a$. Wówczas obie liczby $b=b+0$ oraz $c=c+0$ są przedstawione w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach. Z warunków zadania wynika wówczas, że liczby $b$ oraz $c$ są czerwone. Jest to sprzeczność, gdyż liczby $b$ oraz $c$ są różnych kolorów.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje kolorowanie mające zadaną własność.

*Uwaga*

Istnieją kolorowania przy użyciu dwóch kolorów, powiedzmy czerwonego i niebieskiego, mające zadaną własność. Można na przykład pokolorować wszystkie liczby nieparzyste na czerwono, a wszystkie liczby parzyste na niebiesko. Wówczas suma każdych dwóch liczb różnego koloru, czyli suma liczby parzystej i nieparzystej, jest nieparzysta, czyli czerwona.

---

**6.** Dodatnie liczby całkowite $k$, $m$, $n$ spełniają równość $m^2+n=k^2+k$. Wykaż, że $m \leqslant n$.

*Szkic rozwiazania*

*Sposób* I

Zauważmy, że $m \leqslant k$. Istotnie: gdyby $m \geqslant k+1$, to

$$m^2+n>m^2 \geqslant k^2+2k+1>k^2+k,$$

co nie może mieć miejsca. Zatem rzeczywiście $m \leqslant k$ i w konsekwencji

$$k^2+k=m^2+n \leqslant k^2+n,$$

skąd $k \leqslant n$. Łącząc uzyskane nierówności $m \leqslant k$ i $k \leqslant n$, dostajemy tezę zadania.

*Sposób* II

Z danej w treści zadania równości wynika, że

$$4n+1=4(k^2+k-m^2)+1=4k^2+4k+1-4m^2=(2k+1)^2-(2m)^2=(2k+1-2m)(2k+1+2m).$$

Ponieważ liczby $4n+1$ oraz $2k+1+2m$ są dodatnie, więc również liczba $2k+1-2m$ jest dodatnia, skąd wniosek, że

$$2k+1-2m \geqslant 1, \quad \text{czyli} \quad m \leqslant k.$$

Ponadto liczba $2k+1+2m$ jest dzielnikiem liczby $4n+1$, wobec czego

$$2k+1+2m \leqslant 4n+1, \quad \text{czyli} \quad k+m \leqslant 2n.$$

Łącząc uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$2m=m+m \leqslant k+m \leqslant 2n, \quad \text{czyli} \quad m \leqslant n,$$

co było do udowodnienia.

*Sposób* III

Przypuśćmy, że istnieje trójka liczb spełniających warunki zadania, dla której $m>n$. Wówczas

$$m^2+n<m^2+m=m(m+1) \quad \text{oraz} \quad m^2+n>m^2>m^2-m=(m-1)m.$$

Łącząc powyższe nierówności z daną w treści zadania równością $m^2+n=k(k+1)$, otrzymujemy

$$(m-1)m<k(k+1)<m(m+1).$$

---

To oznacza, że liczba $k(k+1)$ będąca iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych znajduje się pomiędzy liczbami $(m-1)m$ a $m(m+1)$, czyli kolejnymi iloczynami dwóch kolejnych liczb naturalnych. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

*Uwaga*

Przedstawione w ostatnim sposobie rozwiązania rozumowanie polegające na szacowaniach angażujących kolejne liczby całkowite konkretnej postaci warto porównać z metodą opisaną w artykule *Między kwadratami*, *Kwadrat* nr 20 (wrzesień 2017).

---

**7.** Kwadrat $ABCD$ o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu $ABCDA'B'C'D'$. Krawędzie boczne $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty $K$, $L$, $M$ leżą odpowiednio na odcinkach $AA'$, $BB'$, $CC'$, przy czym

$$AK=3, \quad BL=2, \quad CM=5\,.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty $K$, $L$, $M$ rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

*Szkic rozwiazania*

Rozważmy takie punkty $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ leżące odpowiednio na półprostych $AA'^{\rightarrow}$, $BB'^{\rightarrow}$, $CC'^{\rightarrow}$, $DD'^{\rightarrow}$, że $AA''=BB''=CC''=DD''=8$. Wówczas objętość prostopadłościanu $A'B'C'D'A''B''C''D''$ jest równa $4\cdot4\cdot1=16$.

Oznaczmy przez $N$ punkt przecięcia płaszczyzny $KLM$ z prostą $DD''$. Zauważmy, że (leżące w jednej płaszczyźnie) proste $KL$ i $MN$ są równoległe, gdyż są zawarte w równoległych płaszczyznach $ABB'A'$, $CDD'C'$. Podobnie proste $KN$ i $LM$ są równoległe. Wobec tego czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Oznaczmy przez $S$ środek symetrii tego równoległoboku.

Ponieważ $MC''=CC''-CM=8-5=3=AK$ oraz odcinki $AK$ i $MC''$ są równoległe, więc $AKC''M$ jest równoległobokiem. W szczególności punkt $S$ jest środkiem przekątnej $AC''$ prostopadłościanu $ABCDA''B''C''D''$, czyli środkiem symetrii tego prostopadłościanu. To zaś oznacza, że płaszczyzna $KLMN$ dzieli prostopadłościan na dwie bryły o równych objętościach, równych $\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot8=64$.

Jedna z brył uzyskanych w wyniku podziału opisanego w poprzednim akapicie (zawierająca ścianę $ABCD$) pokrywa się z bryłą, której objętość należy znaleźć. Druga zaś powstaje z drugiej szukanej bryły przez doklejenie prostopadłościanu $A'B'C'D'A''B''C''D''$. Wobec tego odpowiedzią są liczby 64 oraz $64-16=48$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku