

# XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów (2018/19)

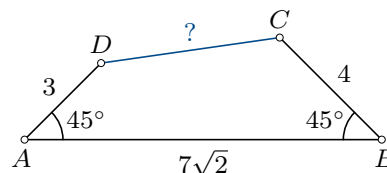
Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —  
część korespondencyjna

(1 września – 15 października 2018 r.)



1. Liczbę naturalną  $n$  pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę  $999^{1000}$ . Wyznacz cyfrę jedności liczby  $n$ .

2. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ$  oraz  $DA = 3$ ,  $AB = 7\sqrt{2}$ ,  $BC = 4$ . Oblicz długość boku  $CD$ .



Zadanie 2.

3. Liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są różne od 0 i spełniają zależność

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}.$$

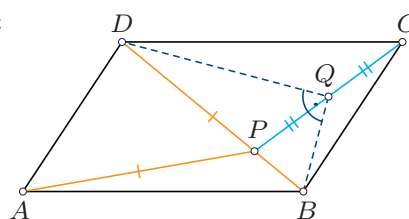
Wykaż, że  $a+b+c \leq 0$ .

4. Dodatkowo liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mają tę własność, że:

- $a$  daje resztę 2 z dzielenia przez  $b$ ,
- $b$  daje resztę 2 z dzielenia przez  $c$ ,
- $c$  daje resztę 4 z dzielenia przez  $a$ .

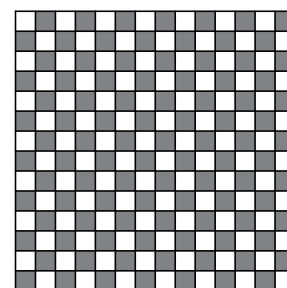
Udowodnij, że  $c = 4$ .

5. Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Na przekątnej  $BD$  wybrano taki punkt  $P$ , że spełniona jest równość  $AP = BP$ . Punkt  $Q$  jest środkiem odcinka  $CP$ . Wykaż, że  $\sphericalangle BQD = 90^\circ$ .



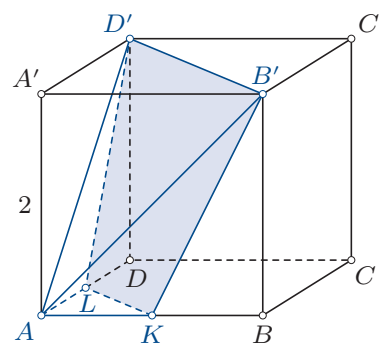
Zadanie 5.

6. Pola szachownicy o wymiarach  $14 \times 14$  pokolorowano w sposób przedstawiony na rysunku. Czy można wybrać siedem pól czarnych i siedem pól białych tej szachownicy w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie jedno wybrane pole? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 6.

7. Dany jest sześcian  $ABCD A' B' C' D'$  o krawędzi długości 2 i wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku. Punkt  $K$  jest środkiem krawędzi  $AB$ . Płaszczyzna zawierająca punkty  $B'$ ,  $D'$ ,  $K$  przecina krawędź  $AD$  w punkcie  $L$ . Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie czworokąta  $D' B' K L$  i wierzchołku  $A$ .



Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**15 października 2018 r. (decyduje data stempla pocztowego).**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: [www.omj.edu.pl](http://www.omj.edu.pl).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.