XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna
(1 września 2018 r. – 15 października 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczbę naturalną n pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę 999^{1000}. Wyznacz cyfrę jedności liczby n.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Cyfrą jedności liczby n jest 7.

Zauważmy, że liczba 999^2 jest zakończona cyfrą 1, wobec czego liczba $3n=(999^2)^{500}$ jest także zakończona cyfrą 1. Stąd wniosek, że liczba $21n=7\cdot 3n$ jest zakończona cyfrą 7. Jednak liczby $21n$ oraz n mają tę samą cyfrę jedności, gdyż ich różnica $21n-n=20n$ jest zakończona cyfrą 0.

Uwaga

Poniższa tabelka przedstawia wszystkie możliwe cyfry jedności liczby k oraz odpowiadające cyfry jedności liczby $3k$. Wynika stąd, że znając ostatnią cyfrę liczby $3k$ można jednoznacznie odtworzyć ostatnią cyfrę liczby k nie tylko w sytuacji, gdy cyfrą jedności liczby $3k$ jest 1.

k	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...**7**	...8	...9
$3k$	...0	...3	...6	...9	...2	...5	...8	...**1**	...4	...7

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABC=45^\circ \quad \text{oraz} \quad DA=3,\ AB=7\sqrt{2},\ BC=4.$$

Oblicz długość boku CD.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Bok CD ma długość 5.

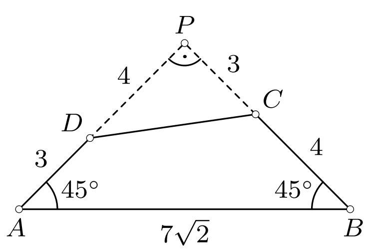
Sposób I

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AD i BC (rys. 1). Z treści zadania wiemy, że $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA=45^\circ$, więc ABP jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Wobec tego $AP\sqrt{2}=AB=7\sqrt{2}$, skąd otrzymujemy $AP=7$. Zatem również $BP=7$. W konsekwencji

$$DP=AP-AD=7-3=4 \quad \text{oraz} \quad CP=BP-BC=7-4=3.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CDP, obliczamy

$$CD^2=CP^2+DP^2=3^2+4^2=25, \quad \text{skąd} \quad CD=5.$$



rys. 1

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Sposób II

Niech X, Y będą rzutami prostokątnymi punktów D, C na prostą AB oraz niech Z będzie rzutem prostokątnym punktu D na prostą CY (rys. 2). Wówczas trójkąty AXD oraz BYC są prostokątne i równoramienne, skąd

$$AX = XD = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad BY = YC = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Czworokąt $XYZD$ jest prostokątem, w związku z czym

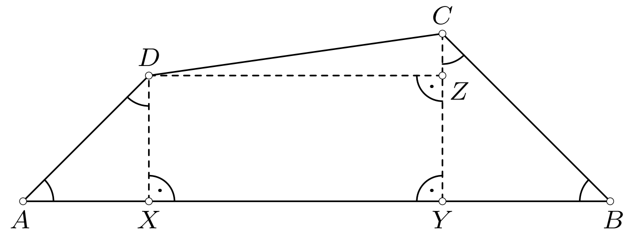
$$DZ = XY = AB - AX - BY = 7\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

oraz

$$CZ = YC - YZ = YC - XD = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CDZ, otrzymujemy

$$CD^2 = DZ^2 + CZ^2 = \frac{49}{2} + \frac{1}{2} = 25, \quad \text{skąd} \quad CD = 5.$$



rys. 2

---

3. Liczby całkowite a, b, c są różne od 0 i spełniają zależność

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}.$$

Wykaż, że $a+b+c \leqslant 0$.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie daną w treści zadania równość, otrzymujemy kolejno

$$(a+c^2)(b+c^2) = ab,$$
$$ab + ac^2 + bc^2 + c^4 = ab,$$
$$c^2(a+b+c^2) = 0.$$

Ponieważ $c \neq 0$, więc z ostatniej równości wynika, że $a+b+c^2 = 0$.

Jeśli $c=1$, to $a+b+c = a+b+c^2 = 0$ i teza zadania jest spełniona.

W przeciwnym przypadku, obie liczby c oraz $c-1$ są różne od 0. Ponieważ są to liczby całkowite różniące się o 1, więc nie mogą być przeciwnych znaków (różnica dwóch liczb całkowitych przeciwnych znaków wynosi co najmniej 2). W związku z tym $c(c-1) > 0$, skąd $c^2 > c$. W konsekwencji $a+b+c < a+b+c^2 = 0$, co należało wykazać.

Uwaga

Z powyższego rozumowania wynika, że w postulowana nierówność staje się równością jedynie wtedy, gdy $c=1$ oraz a, b są dowolnymi liczbami całkowitymi o sumie równiej -1.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Dodatnie liczby całkowite a, b, c mają tę własność, że:

- a daje resztę 2 z dzielenia przez b,
- b daje resztę 2 z dzielenia przez c,
- c daje resztę 4 z dzielenia przez a.

Udowodnij, że $c=4$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że jeśli dodatnia liczba całkowita x daje z dzielenia przez dodatnią liczbę całkowitą y resztę r, to $y>r$ oraz liczba $x-r$ jest podzielna przez y. Wobec tego z warunków zadania wynika, że $b>2$, $c>2$, $a>4$, a ponadto

- liczba $a-2$ jest podzielna przez b,
- liczba $b-2$ jest podzielna przez c,
- liczba $c-4$ jest podzielna przez a.

Przypuśćmy, że $c>4$. Wtedy wszystkie liczby $a-2$, $b-2$ oraz $c-4$ są dodatnie i podzielne odpowiednio przez b, c oraz a. Stąd wniosek, że

$$a-2 \geqslant b, \quad b-2 \geqslant c, \quad c-4 \geqslant a.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy $a+b+c-8 \geqslant a+b+c$, czyli $-8 \geqslant 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $c \leqslant 4$.

Wiemy już jednak, że $c>2$, w związku z tym pozostaje do rozpatrzenia przypadek $c=3$. Wtedy trzeci z powyższych warunków oznacza, że liczba $c-4=-1$ jest podzielna przez liczbę a, która jest większa od 4. To oczywiście spełnione być nie może.

Wobec powyższego liczba c musi być równa 4, co kończy rozwiązanie zadania.

---

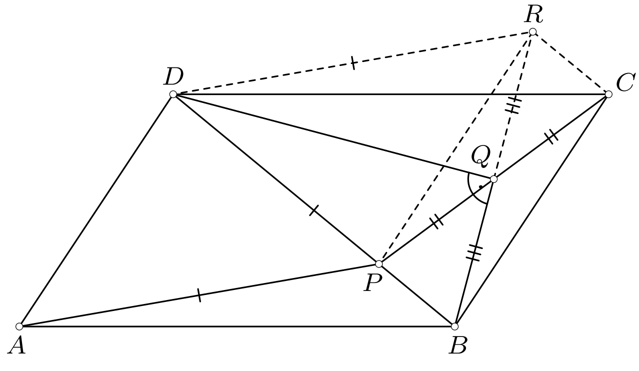
5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P, że spełniona jest równość $AP=BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP. Wykaż, że $\sphericalangle BQD=90^\circ$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Niech R będzie takim punktem, że czworokąt $ADRP$ jest równoległobokiem (rys. 3). Wówczas $PR=AD=BC$ oraz $PR \parallel AD \parallel BC$, wobec czego czworokąt $BCRP$ także jest równoległobokiem.

Punkt Q jest środkiem przekątnej CP równoległoboku $BCRP$, więc jest także środkiem przekątnej BR. Ponadto $DR=AP=BD$, więc odcinek BR jest podstawą trójkąta równoramiennego BDR. Wobec tego punkt Q, jako środek tej podstawy, jest także spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D. Stąd wniosek, że $\sphericalangle BQD=90^\circ$.



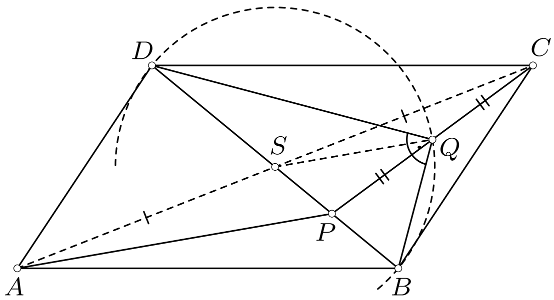
rys. 3

Sposób II

Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Punkt S jest wtedy środkiem każdej z jego przekątnych (rys. 4). Skoro odcinek QS łączy środki boków AC i PC trójkąta APC, to

$$QS = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BD = BS = DS.$$

Wobec tego punkty B, D, Q leżą na okręgu o średnicy BD, skąd $\sphericalangle BQD = 90^\circ$.



rys. 4

Uwaga

W przedstawionych rozwiązaniach kluczowe było uzupełnienie rysunku o pewien element pozwalający uchwycić niewidoczne na pierwszy rzut oka zależności. Metodom rozwiązywania zadań geometrycznych w taki sposób poświęcone są artykuły *Dorysujmy środek odcinka*, *Kwadrat* nr 19 (styczeń 2017) oraz *Dorysujmy równoległobok*, *Kwadrat* nr 20 (wrzesień 2017).

---

6. Pola szachownicy o wymiarach 14×14 pokolorowano w sposób przedstawiony na rysunku. Czy można wybrać siedem pól czarnych i siedem pól białych tej szachownicy w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie jedno wybrane pole? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Taki wybór pól nie jest możliwy.

Ponumerujmy wiersze i kolumny szachownicy i wpiszmy w każde pole sumę numerów wiersza oraz kolumny, jak pokazano na rysunku (rys. 5). Wówczas w pola czarne są wpisane liczby nieparzyste, a w pola białe — liczby parzyste.

Suma liczb wpisanych w siedem pól czarnych jest więc zawsze nieparzysta, a suma liczb wpisanych w siedem pól białych jest zawsze parzysta. To oznacza, że suma liczb wpisanych w czternaście pól szachownicy, wśród których jest siedem pól czarnych i siedem pól białych, jest nieparzysta.

Tymczasem suma liczb wpisanych w czternaście pól szachownicy o tej własności, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedno z tych pól, jest równa sumie numerów wszystkich wierszy i wszystkich kolumn, czyli

$$2\cdot(1+2+\ldots+14),$$

a zatem jest liczbą parzystą.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

rys. 5

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

7. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 2 i wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku. Punkt K jest środkiem krawędzi AB. Płaszczyzna zawierająca punkty B', D', K przecina krawędź AD w punkcie L. Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie czworokąta $D'B'KL$ i wierzchołku A.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa jest równa 1.

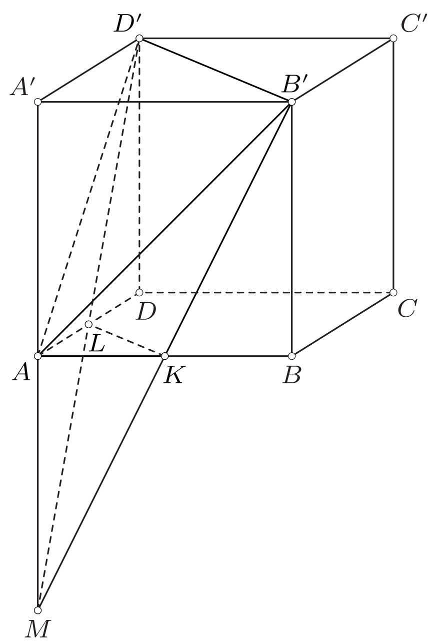
Niech M będzie wspólnym punktem płaszczyzny $B'KLD'$ oraz prostej AA' (rys. 6). Punkt M leży oczywiście w płaszczyźnie $B'KLD'$. Punkt M leży również w płaszczyźnie $B'KAA'$, gdyż cała prosta AA' w niej leży. Wobec tego punkt M należy do części wspólnej obu tych płaszczyzn, czyli do prostej $B'K$.

Analogicznie uzasadniamy, że punkt M leży na prostej $D'L$.

Ponieważ $AK = KB$, więc trójkąty prostokątne AKM i BKB' są przystające (cecha kąt-bok-kąt). Wobec tego $AM = BB' = DD'$, skąd wynika, że trójkąty ALM i DLD' są przystające (ponownie cecha kąt-bok-kąt). W związku z tym $AL = LD$.

Szukaną objętość V ostrosłupa można więc wyznaczyć, odejmując od objętości czworościanu $A'B'D'M$ sumę objętości czworościanów $A'B'D'A$ oraz $AKLM$:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{A'B'\cdot A'D'}{2}\cdot A'M - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{A'B'\cdot A'D'}{2}\cdot AA' + \frac{1}{3}\cdot\frac{AK\cdot AL}{2}\cdot AM\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 4 - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 2\right) = 1\,.$$



rys. 6

Uwaga

Podobną metodę można wykorzystać do obliczenia objętości brył powstałych w wyniku przekroju sześcianu pewną płaszczyzną. Przykłady takich zadań znajdują się w artykule *Objętość ostrosłupa*, *Kwadrat* nr 22 (wrzesień 2018).

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku