XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 11 października 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. W klasie Marka jest 17 uczniów i wszyscy napisali test. Marek uzyskał wynik o 17 punktów wyższy od średniej arytmetycznej wyników pozostałych uczniów. O ile punktów wynik Marka jest wyższy od średniej arytmetycznej wyników całej klasy? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie
Sposób I

Oznaczmy wynik Marka przez m. Wówczas średnia arytmetyczna wyników pozostałych 16 uczniów to $m-17$, a zatem suma uzyskanych przez nich wyników to $16\cdot(m-17)$. Wobec tego suma wyników uzyskanych przez całą klasę jest równa

$$16\cdot(m-17)+m=16\cdot m-16\cdot 17+m=17m-16\cdot 17=17\cdot(m-16).$$

W rezultacie, średnia arytmetyczna wyników całej klasy to

$$\frac{17\cdot(m-16)}{17}=m-16.$$

Odpowiedź: Wynik Marka jest o 16 punktów wyższy od średniej arytmetycznej wyników całej klasy.

Uwaga 1.
Podobny ciąg obliczeń można przeprowadzić używając innych oznaczeń. Przykładowo, jeśli oznaczymy przez x średnią arytmetyczną 16 uczniów różnych od Marka, to suma ich wyników będzie równa $16x$, suma wyników całej klasy będzie równa $17x+17$, a średni wynik całej klasy będzie równy $x+1$, czyli o 16 mniej niż wynik Marka: $x+17$.

Sposób II
Z warunków zadania wynika, że Marek ma co najmniej 17 punktów. Przypuśćmy, że Marek przekazał każdej z pozostałych osób w klasie po jednym punkcie. Zauważmy, że w wyniku opisanej zmiany łączny wynik wszystkich uczniów pozostał taki sam, jak przed jej dokonaniem. Wobec tego nie zmieniła się także średnia arytmetyczna wyników całej klasy.

Średnia arytmetyczna wyników uczniów różnych od Marka wzrosła o 1, gdyż każdy z nich otrzymał 1 dodatkowy punkt. Wobec tego nowy wynik Marka (o 16 punktów niższy niż początkowy) jest równy nowej średniej pozostałych uczniów — jest to więc także średni wynik wszystkich uczniów w klasie. Stąd wniosek, że średnia arytmetyczna wyników całej klasy (niezmieniona w stosunku do początkowej) jest o 16 punktów niższa od (początkowego) wyniku Marka.

Uwaga 2.
Z warunków zadania wynika, że wynik Marka nie mógł być najniższym spośród wyników uzyskanych w jego klasie. Okazuje się, że mógł być drugim najniższym — przykładowo jeśli założymy, że 15 spośród uczniów różnych od Marka uzyskało wynik 289 punktów, Marek — 288 punktów, a pozostały uczeń — 1 punkt, to warunki zadania są spełnione.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

2. W prostokącie $ABCD$ stosunek długości boków $BC:AB$ jest równy $\sqrt{2}$. Wewnątrz tego prostokąta zaznaczono taki punkt X, że $AB=BX=XD$. Wyznacz miarę kąta BXD.

Rozwiązanie

Sposób I

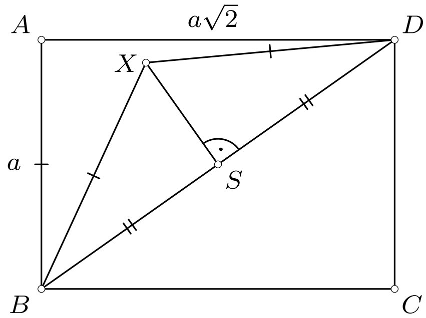
Przyjmijmy, że $AB=a$. Wówczas $AD=BC=a\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD wynika, że

$$BD^2=AB^2+AD^2=a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=3a^2, \quad \text{skąd} \quad BD=a\sqrt{3}.$$

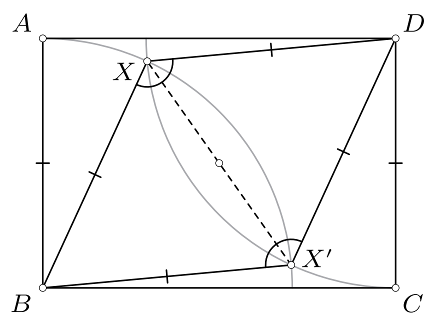
Oznaczmy przez S środek odcinka BD (rys. 1). Ponieważ $BX=XD$, więc odcinek XS jest wysokością trójkąta równoramiennego BDX. W konsekwencji, ponownie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla trójkąta SXD, uzyskujemy

$$XS^2=XD^2-SD^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}, \quad \text{skąd} \quad XS=\frac{a}{2}.$$

Trójkąt prostokątny SXD ma boki długości a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, jest więc połówką trójkąta równobocznego o boku a i w szczególności $\sphericalangle SXD=60^\circ$. W konsekwencji $\sphericalangle BXD=2\cdot 60^\circ=120^\circ$.



rys. 1



rys. 2

Uwaga 1.

W przeprowadzonym rozumowaniu można bez straty ogólności założyć, że a jest konkretną liczbą dodatnią, np. $a=1$. Wynika to z faktu, że *skalowanie* konfiguracji z treści zadania nie ma wpływu na miarę szukanego kąta.

Uwaga 2.

Równość $BX=XD=a$ oznacza, że punkt X jest jednym z punktów przecięcia okręgów o promieniu a oraz środkach B i D. Ponieważ odległość między środkami tych okręgów, równa $a\sqrt{3}$, jest mniejsza od sumy długości ich promieni, równej $2a$, więc te okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach. Istnieją więc dwa punkty X spełniające warunki zadania (rys. 2). Są one wierzchołkami trójkątów równoramiennych o podstawie BD i ramieniu a znajdującymi się po różnych stronach prostej BD. Odpowiedź jest niezależna od tego, który z punktów zostanie wybrany, gdyż są one symetryczne względem środka prostokąta $ABCD$.

Sposób II

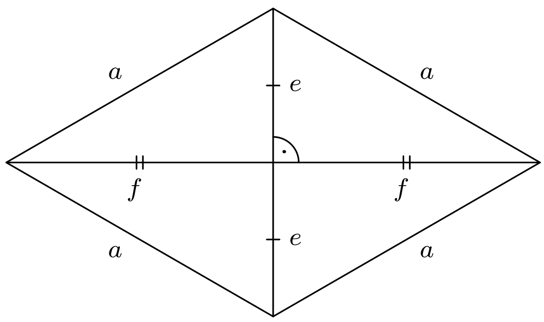
W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

Suma kwadratów długości przekątnych rombu o boku długości a jest równa $4a^2$.

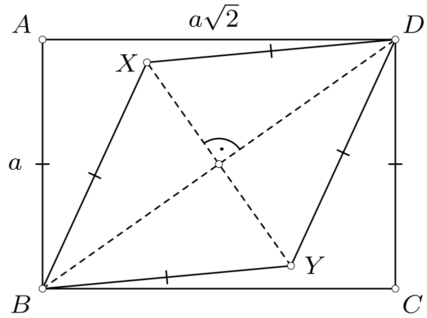
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Aby przekonać się o jego prawdziwości zauważmy najpierw, że przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy. Jeśli więc przyjmiemy, że przekątne rombu o boku długości a mają długości $2e$ oraz $2f$ (rys. 3), to po narysowaniu tych przekątnych uzyskamy cztery przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości e i f. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że $e^2+f^2=a^2$. Suma kwadratów długości przekątnych jest zatem równa

$$(2e)^2+(2f)^2=4e^2+4f^2=4(e^2+f^2)=4a^2.$$



rys. 3



rys. 4

Przechodzimy do rozwiązania. Oznaczmy przez Y punkt symetryczny do punktu X względem środka prostokąta $ABCD$ (rys. 4). Wówczas czworokąt $BXDY$ jest rombem. Przyjmijmy, że $AB=a$, czyli a jest długością boku uzyskanego rombu. Wówczas $AD=a\sqrt{2}$ oraz podobnie jak w poprzednim sposobie

$$BD^2=a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=3a^2.$$

Wykorzystując udowodniony na początku fakt mamy więc

$$4a^2=BD^2+XY^2=3a^2+XY^2, \quad \text{skąd} \quad a^2=XY^2, \quad \text{czyli} \quad XY=a.$$

Skoro długość XY jest równa długości każdego z boków rombu $BXDY$, to trójkąty BXY oraz DXY są równoboczne. Zatem $\sphericalangle BXD=2\cdot 60^\circ=120^\circ$.

Uwaga 3.

Prawdziwy jest ogólniejszy fakt niż przytoczony w powyższym rozwiązaniu, nazywany czasem *tożsamością równoległoboku*:

> *W każdym równoległoboku suma kwadratów długości wszystkich czterech boków jest równa sumie kwadratów długości przekątnych.*

Dowód można przeprowadzić korzystając wielokrotnie z twierdzenia Pitagorasa.

Uwaga 4.

Proporcje danego w treści zadania prostokąta są tak dobrane, że po podzieleniu go na pół wzdłuż prostej łączącej środki dłuższych boków, uzyskamy dwa mniejsze prostokąty podobne do wyjściowego (tzn. o takich samych jak on proporcjach boków). Fakt ten jest powodem, dla którego stosowane powszechnie arkusze papieru (np. formatu A4) mają stosunek długości boków bardzo zbliżony do $\sqrt{2}$.

W związku z powyższym konfiguracja z zadania pozwala na konstrukcję dobrego przybliżenia kąta 120° za pomocą składania kartki papieru.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

3. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od $\sqrt{2n}$ i mniejsza od $\sqrt{5n}$.

Rozwiązanie

Sposób I

W rozwiązaniu wykorzystamy obserwację mówiącą, że jeśli różnica dwóch liczb jest większa od 1, to pomiędzy nimi jest pewna liczba całkowita:

> *Jeśli liczby x i y spełniają warunek $y-x>1$, to istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od x i mniejsza od y.*

Krótkie uzasadnienie tej obserwacji jest następujące. Oznaczmy przez m najmniejszą liczbę całkowitą większą od x. Wówczas

$$x<m\leqslant x+1<y,$$

więc liczba m jest mniejsza od liczby y.

Przechodzimy do rozwiązania. Zauważmy, że $\sqrt{2}<2<\sqrt{5}$, co potwierdza tezę zadania dla $n=1$. Przyjmijmy dalej, że $n\geqslant 2$. Wówczas $\sqrt{n}\geqslant\sqrt{2}$, a zatem

$$\sqrt{5n}-\sqrt{2n}=\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\geqslant\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{10}-2>3-2=1.$$

W rezultacie, różnica pomiędzy liczbami $\sqrt{5n}$ oraz $\sqrt{2n}$ jest większa od 1. Na mocy przytoczonej obserwacji wynika z tego, że ściśle pomiędzy tymi liczbami jest liczba całkowita.

Uwaga 1.

Wykorzystaną obserwację można w naturalny sposób zilustrować na osi liczbowej. Intuicyjnie oznacza ona, że odcinek o długości większej od 1 *nie mieści się* pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, czyli w odcinku o długości 1.

Uwaga 2.

Okazuje się, że dla dowolnej pary liczb dodatnich $a<b$ pomiędzy liczbami $a\sqrt{n}$ oraz $b\sqrt{n}$ znajduje się liczba całkowita *dla dostatecznie dużych wartości* n. Naśladując przedstawione wyżej rozumowanie można udowodnić, że aby taka liczba istniała, wystarczy aby spełniona była nierówność $b\sqrt{n}-a\sqrt{n}>1$, czyli $n>1/(b-a)^2$. Jak widać, im mniejsza jest różnica $b-a$, tym większe są wartości n, dla których powyższa nierówność jest spełniona.

Sposób II

Zauważmy, że wystarczy wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ pomiędzy liczbami $2n$ oraz $5n$ jest liczba m będąca kwadratem liczby całkowitej. Jeśli bowiem $2n<m<5n$, to $\sqrt{2n}<\sqrt{m}<\sqrt{5n}$, gdzie $\sqrt{m}$ jest liczbą całkowitą.

Dla $n=1$ wystarczy przyjąć $m=4$. W dalszej części rozwiązania załóżmy, że $n\geqslant 2$.

Oznaczmy przez k największą taką liczbę całkowitą, że $k^2\leqslant 2n$. Wówczas liczba $(k+1)^2$ jest większa od $2n$, czyli

$$k^2\leqslant 2n<(k+1)^2.$$

Wykażemy, że liczba $(k+1)^2$ jest mniejsza od $5n$, co zakończy rozwiązanie. Zauważmy, że skoro $n\geqslant 2$, to $k\geqslant 2$ i w konsekwencji $k^2\geqslant 2k$. Wobec tego

$$(k+1)^2=k^2+2k+1\leqslant k^2+k^2+1=2k^2+1\leqslant 2\cdot 2n+1=4n+1<4n+n=5n.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

4. W każde pole poniższej tabeli należy wpisać inną liczbę całkowitą spośród liczb od 1 do 17 w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich ośmiu kolumnach były równe, a suma liczb w górnym wierszu była dwa razy większa od sumy liczb w dolnym wierszu.

Której z liczb od 1 do 17 można nie wpisać do tabeli? Podaj wszystkie takie liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez n liczbę niewpisaną do tabeli. To oznacza, że suma wszystkich liczb wpisanych do tabeli jest równa

$$1+2+3+\ldots+17-n=153-n.$$

Z warunków zadania wynika jednocześnie, że suma wszystkich liczb wpisanych do tabeli jest:

- podzielna przez 3, gdyż jest trzykrotnością sumy liczb wpisanych do dolnego wiersza;
- podzielna przez 8, gdyż jest ośmiokrotnością sumy liczb wpisanych do każdej kolumny.

W konsekwencji liczba $153-n$ jest podzielna przez 24. Ponadto, ponieważ $1 \leqslant n \leqslant 17$, mamy

$$136 \leqslant 153-n \leqslant 152.$$

Stąd wniosek, że $153-n=144$ i w konsekwencji $n=9$.

Pozostaje wskazać sposób wpisania liczb z pominięciem liczby 9, który spełnia warunki zadania (rys. 5).

17	16	3	14	13	12	11	10
1	2	15	4	5	6	7	8

rys. 5

Uwaga

Z dokładnością do kolejności kolumn są tylko cztery możliwości wpisania liczb w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania (rys. 5–8).

17	16	15	4	13	12	11	8
1	2	3	14	5	6	7	10

rys. 6

17	16	15	14	5	12	7	10
1	2	3	4	13	6	11	8

rys. 7

17	16	15	14	13	6	7	8
1	2	3	4	5	12	11	10

rys. 8

Sposób II

Niech k oznacza sumę liczb w każdej z kolumn po wypełnieniu tabeli zgodnie z warunkami zadania. Zauważmy, że gdyby liczba k była mniejsza od 17, to w tabeli nie mogłaby się znaleźć żadna z liczb 16, 17 (gdyż jako drugą liczbę w tej samej kolumnie należałoby wpisać 0 lub -1). To przeczy założeniu, że tylko jedna z liczb od 1 do 17 pozostaje niewykorzystana. Podobnie gdyby liczba k była większa od 19, to w tabeli nie mogłaby się pojawić żadna z liczb 1, 2, wbrew założeniu, że pomijamy tylko jedną liczbę. To oznacza, że k jest jedną z liczb: 17, 18, 19.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Niech w oznacza sumę liczb wpisanych w dolnym wierszu tabeli. Wówczas $2w$ jest sumą liczb wpisanych w jej górnym wierszu, a suma liczb wpisanych w całej tabeli jest równa $3w$. Z drugiej strony suma liczb w tabeli jest równa $8k$, co oznacza, że k jest liczbą podzielną przez 3. W konsekwencji k może być równe jedynie liczbie 18, gdyż 17 oraz 19 nie są liczbami podzielnymi przez 3.

Liczba 18 ma 8 przedstawień jako suma dwóch różnych liczb całkowitych od 1 do 17:

$$1+17=2+16=3+15=4+14=5+13=6+12=7+11=8+10,$$

więc w każdą kolumnę tabeli wpisane są składniki innego spośród tych ośmiu przedstawień. To oznacza, że jeśli wypełnienie tablicy zgodnie z warunkami zadania jest możliwe, to niewykorzystaną liczbą jest 9. Aby zakończyć rozwiązanie, należy podać przykład wypełnienia tabeli liczbami z pominięciem liczby 9 (rys. 5–8).

---

5. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta równobocznego ABC i spełniają warunki

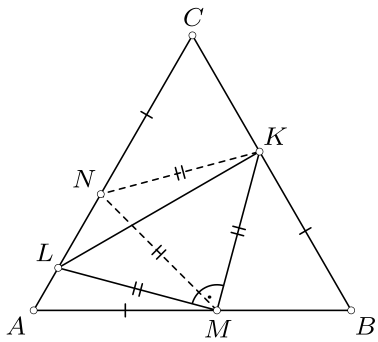
$$KM=LM, \quad \sphericalangle KML=90^\circ \quad \text{oraz} \quad AM=BK.$$

Udowodnij, że $\sphericalangle CKL=90^\circ$.

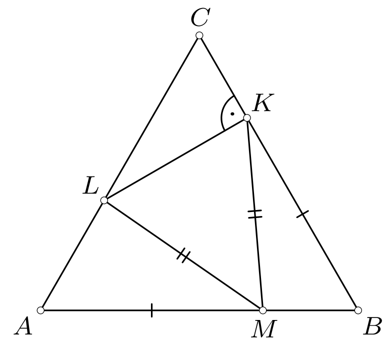
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez N taki punkt leżący na boku AC, że $AM=BK=CN$ (rys. 9). Wówczas $BM=CK=AN$, więc trójkąty AMN, BKM, CNK są przystające (cecha bok–kąt–bok), a trójkąt KMN jest równoboczny.



rys. 9



rys. 10

Zauważmy, że $MN=ML$ oraz $\sphericalangle LMN=\sphericalangle KML-\sphericalangle KMN=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ więc w trójkącie równoramiennym LMN mamy

$$2\sphericalangle MLN=\sphericalangle MLN+\sphericalangle MNL=180^\circ-\sphericalangle LMN=150^\circ, \quad \text{czyli} \quad \sphericalangle MLN=75^\circ.$$

W konsekwencji $\sphericalangle CLK=\sphericalangle MLC-\sphericalangle MLK=75^\circ-45^\circ=30^\circ$. Dwa z kątów trójkąta CKL mają więc miary $\sphericalangle CLK=30^\circ$ oraz $\sphericalangle KCL=60^\circ$, co oznacza, że trzeci kąt tego trójkąta jest prosty, czyli $\sphericalangle CKL=90^\circ$.

Uwaga 1.

Teza zadania jest spełniona również gdy założenie $\sphericalangle KML=90^\circ$ zastąpimy znacznie słabszym założeniem $\sphericalangle KML\neq 60^\circ$ (rys. 10). Nietrudno sprawdzić, że wówczas $N\neq L$, a podobne do zaprezentowanych powyżej rachunki na kątach prowadzą do wniosku, że $\sphericalangle CLK=30^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle CKL=90^\circ$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

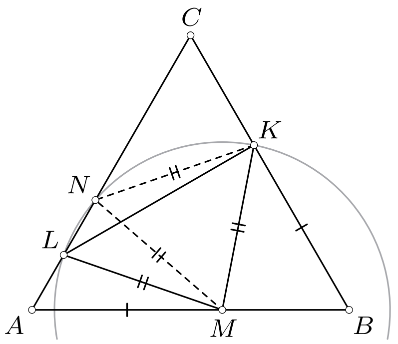
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

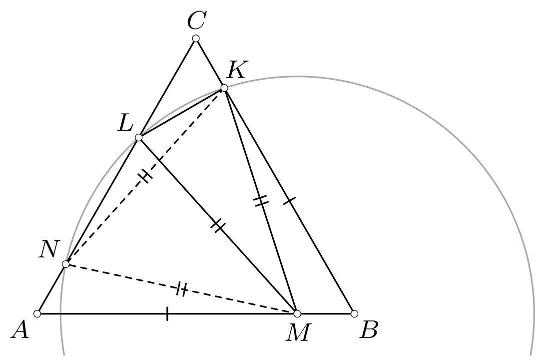
Równość $\sphericalangle CLK = 30^\circ$ można (przy założeniu $\sphericalangle KML \neq 60^\circ$) także uzasadnić korzystając z własności kątów w okręgu: zależność $MK = ML = MN$ oznacza, że punkty K, L, N leżą na okręgu o środku w punkcie M. Wobec tego jeśli $\sphericalangle KML > 60^\circ$ (rys. 11), to kąt KLN jest wpisany w ten okrąg, a zatem jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego KMN opartego na tym samym łuku, skąd

$$\sphericalangle KLN = \frac{1}{2}\sphericalangle KMN = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

W przypadku $\sphericalangle KML < 60^\circ$ (rys. 12) kąt KLN jest równy $180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle KMN = 150^\circ$, więc również uzyskujemy $\sphericalangle CLK = 180^\circ - \sphericalangle KLN = 30^\circ$.



rys. 11



rys. 12

Założenie $\sphericalangle KML \neq 60^\circ$ jest istotne — jeśli je pominiemy, kąt CKL w takiej konfiguracji może mieć dowolną miarę mniejszą od 120°.

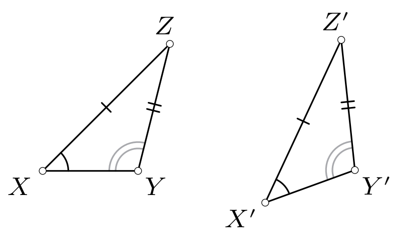
Sposób II

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie, nazywane czasem *czwartą cechą przystawania trójkątów (bok–bok–kąt)*:

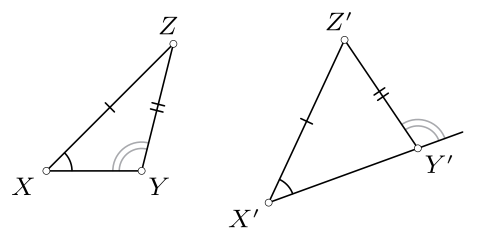
Przypuśćmy, że dla trójkątów XYZ oraz $X'Y'Z'$ spełnione są równości

$$XZ = X'Z', \quad YZ = Y'Z' \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ZXY = \sphericalangle Z'X'Y'.$$

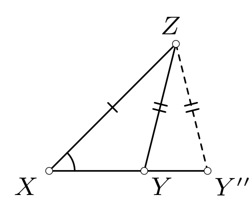
Wówczas $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle X'Y'Z'$ (rys. 13) lub $\sphericalangle XYZ + \sphericalangle X'Y'Z' = 180^\circ$ (rys. 14).



rys. 13



rys. 14



rys. 15

Krótki dowód tego twierdzenia jest następujący. Z uwagi na symetrię ról trójkątów XYZ i $X'Y'Z'$ możemy założyć, że $XY \leqslant X'Y'$. Wybierzmy na półprostej $XY^{\rightarrow}$ taki punkt Y'', że $XY'' = X'Y'$ (rys. 15). Skoro $XZ = X'Z'$ oraz $\sphericalangle ZXY'' = \sphericalangle Z'X'Y'$, to trójkąty $X'Y'Z'$ oraz $XY''Z$ są przystające (cecha bok–kąt–bok). Zatem $Y''Z = Y'Z' = YZ$.

Jeśli $Y = Y''$, to $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle XY''Z = \sphericalangle X'Y'Z'$.

Jeśli zaś $Y \neq Y''$, to trójkąt $YY''Z$ jest równoramienny i w konsekwencji

$$\sphericalangle XYZ = 180^\circ - \sphericalangle Y''YZ = 180^\circ - \sphericalangle YY''Z = 180^\circ - \sphericalangle X'Y'Z'.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

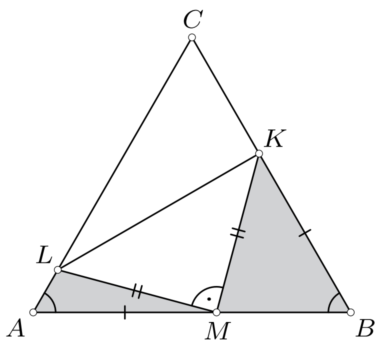
Przechodzimy do rozwiązania. Ponieważ $AM=BK$, $LM=MK$, $\sphericalangle LAM=\sphericalangle MBK$, więc przytoczony fakt można zastosować w odniesieniu do trójkątów ALM oraz BMK (rys. 16). W ten sposób stwierdzamy, że $\sphericalangle ALM=\sphericalangle BMK$ lub $\sphericalangle ALM+\sphericalangle BMK=180^\circ$. Zauważmy jednak, że pierwszy z tych przypadków nie może mieć miejsca, gdyż

$$\begin{aligned}\sphericalangle ALM-\sphericalangle BMK &= (180^\circ-60^\circ-\sphericalangle AML)-\sphericalangle BMK=\\ &=(180^\circ-\sphericalangle AML-\sphericalangle BMK)-60^\circ=90^\circ-60^\circ=30^\circ\neq 0^\circ.\end{aligned}$$

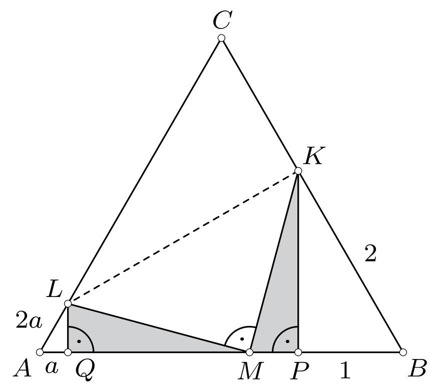
Wobec tego $\sphericalangle ALM+\sphericalangle BMK=180^\circ$, co w połączeniu z powyższą równością prowadzi do wniosku, że $\sphericalangle ALM=105^\circ$ oraz $\sphericalangle BMK=75^\circ$, skąd $\sphericalangle CLK=180^\circ-45^\circ-105^\circ=30^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle CKL=90^\circ$.

Uwaga 2.

Podobnie jak w przypadku poprzedniej metody, ta również jest skuteczna przy zastąpieniu założenia $\sphericalangle KML=90^\circ$ słabszym założeniem $\sphericalangle KML\neq 60^\circ$. Istotność tego założenia jest widoczna przy wykluczaniu przypadku $\sphericalangle ALM=\sphericalangle BMK$ (dla $\sphericalangle KML=60^\circ$ te kąty są równe, więc nie możemy wnioskować o równości $\sphericalangle ALM+\sphericalangle BMK=180^\circ$).



rys. 16



rys. 17

Sposób III

Zauważmy, że do rozwiązania zadania wystarczy wykazanie, że $CL=2\cdot CK$. Istotnie, skoro w trójkącie CKL kąt przy wierzchołku C ma miarę 60°, to powyższa równość pozwala stwierdzić, że trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego, skąd $\sphericalangle CKL=90^\circ$.

Oznaczmy przez P i Q odpowiednio rzuty punktów K i L na prostą AB (rys. 17). Przyjmijmy, że $PB=1$ oraz $AQ=a$. Skoro każdy z trójkątów prostokątnych BPK i AQL jest połową trójkąta równobocznego, to $BK=2$, $KP=\sqrt{3}$, $AL=2a$, $LQ=a\sqrt{3}$.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle MKP=90^\circ-\sphericalangle PMK=\sphericalangle LMQ=90^\circ-\sphericalangle QLM,$$

co wobec $KM=LM$ oznacza, że trójkąty prostokątne KPM oraz MQL są przystające (cecha kąt–bok–kąt). W szczególności mamy więc $MP=LQ=a\sqrt{3}$ oraz $MQ=KP=\sqrt{3}$.

Skoro $AM=BK$, to $a+\sqrt{3}=2$, czyli $a=2-\sqrt{3}$. Bok trójkąta ABC ma długość

$$AM+MP+PB=2+a\sqrt{3}+1=3+2\sqrt{3}-3=2\sqrt{3},$$

skąd uzyskujemy

$$CK=BC-BK=2\sqrt{3}-2 \quad \text{oraz} \quad CL=AC-AL=2\sqrt{3}-2\cdot(2-\sqrt{3})=4\sqrt{3}-4.$$

To prowadzi do konkluzji, że $CL=2\cdot CK$, co było do udowodnienia.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

6. W każdym polu tablicy 10×10 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można tak usunąć z tablicy 50 strzałek, aby żadne dwie z pozostałych nie wskazywały na siebie nawzajem.

Uwaga: Strzałki wskazują na siebie nawzajem także wtedy, gdy ich pola nie sąsiadują lub gdy pomiędzy nimi są inne strzałki

Rozwiązanie

Sposób I

Niech g, d, l oraz p oznaczają liczby strzałek skierowanych odpowiednio w górę, w dół, w lewo oraz w prawo. Wówczas $g+d+l+p=100$. Przypuśćmy, że $g\geqslant d$ oraz $l\geqslant p$. Wtedy

$$100=g+d+l+p\geqslant d+d+p+p=2\cdot(d+p), \quad \text{czyli} \quad 50\geqslant d+p.$$

Możemy więc usunąć z tablicy 50 strzałek w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w prawo. Żadne dwie pozostałe strzałki nie będą wówczas wskazywać na siebie nawzajem.

Analogicznie postępujemy w pozostałych przypadkach, tzn. jeśli $g\leqslant d$ oraz $l\geqslant p$, to usuwamy strzałki w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w górę lub w lewo, jeśli $g\geqslant d$ oraz $l\leqslant p$ — w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w prawo, a jeśli $g\geqslant d$ oraz $l\geqslant p$ — w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w lewo.

Uwaga 1.

Zaprezentowane rozumowanie można alternatywnie przedstawić w następujący sposób. Pośród liczb $d+p$, $g+p$, $d+l$, $g+l$ co najmniej jedna jest nie większa od 50, gdyż suma tych czterech liczb jest równa $2\cdot(g+d+l+p)=200$. Jeżeli $d+p\leqslant 50$ to usuwamy wszystkie strzałki skierowane w dół i wszystkie strzałki skierowane w prawo (i być może jeszcze inne strzałki, aby łącznie usunąć dokładnie 50). Podobnie postępujemy w trzech pozostałych przypadkach.

Sposób II

Pomalujmy wszystkie strzałki skierowane w prawo lub w górę na niebiesko, a wszystkie strzałki skierowane w lewo lub w dół na czerwono. Zauważmy, że wówczas żadne dwie strzałki tego samego koloru nie wskazują na siebie nawzajem.

Ponieważ wszystkich strzałek jest 100, więc co najmniej 50 strzałek ma ten sam kolor. Wystarczy pozostawić w tablicy 50 spośród nich.

Sposób III

Rozważmy dowolny wiersz tablicy oraz wszystkie znajdujące się w nim strzałki *poziome* tzn. skierowane w prawo lub w lewo. Jeśli usuniemy wszystkie strzałki w jednym z tych dwóch kierunków, żadne dwie z pozostałych poziomych strzałek w tym wierszu nie będą wskazywały na siebie nawzajem.

Z każdego wiersza usuńmy poziome strzałki w tym kierunku, który jest *nie bardziej* licznie reprezentowany niż drugi (tj. jeśli jest tyle samo strzałek skierowanych w lewo i w prawo, usuwamy wszystkie strzałki w dowolnym z tych dwóch kierunków, a jeśli liczby strzałek skierowanych w lewo i w prawo są różne, usuwamy mniej liczną grupę strzałek). W ten sposób z całej tablicy usuniemy co najwyżej połowę wszystkich strzałek *poziomych.*

Analogicznie z każdej kolumny usuńmy *pionowe* (tj. skierowane w górę lub w dół) strzałki w kierunku, w którym strzałek jest nie więcej niż w drugim. W ten sposób z całej tablicy usuniemy co najwyżej połowę wszystkich strzałek *pionowych.*

Łącznie usuniemy co najwyżej połowę *wszystkich* strzałek, czyli *co najwyżej* 50 strzałek nie pozostawiając w żadnym wierszu ani kolumnie pary strzałek wskazujących na siebie nawzajem. Do zakończenia rozwiązania wystarczy w razie potrzeby usunąć niektóre z pozostałych strzałek tak, aby w tablicy pozostało ich *dokładnie* 50.

→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←
→	→	→	→	→	←	←	←	←	←

rys. 18

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

rys. 19

→	→	←	←
→	→	←	←
→	→	←	←
→	→	←	←
→	→	←	←
→	←	→	←
→	←	→	←
→	←	→	←
→	←	→	←
→	←	→	←

rys. 20

Uwaga 2.

Okazuje się, że czasem usunięcie tylko 49 strzałek może nie wystarczyć do tego, aby uniknąć sytuacji, w której pozostają dwie strzałki wskazujące na siebie nawzajem.

Przykładowo jeśli z tablicy przedstawionej na rysunku 18 usuniemy tylko 49 strzałek, to z pewnego wiersza usuniemy co najwyżej 4 strzałki. W tym wierszu pozostanie więc co najmniej jedna strzałka skierowana w lewo i co najmniej jedna strzałka skierowana w prawo i będą one wskazywać na siebie nawzajem.

Inny przykład takiej sytuacji można uzyskać dzieląc tablicę 10×10 w dowolny sposób na prostokąty o wymiarach 1×2 i w obrębie każdego z nich umieszczając strzałki wskazujące na siebie nawzajem (przykład uzyskanego w taki sposób układu strzałek jest widoczny na rysunku 19). Wówczas po usunięciu 49 strzałek co najmniej jeden prostokąt 1×2 pozostanie „nietknięty”, tzn. żadna z wpisanych doń strzałek nie zostanie usunięta i w konsekwencji — w tablicy pozostaną strzałki wskazujące na siebie nawzajem.

Uwaga 3.

Można zadać pytanie, czy zawsze jest możliwe usunięcie 50 strzałek z dodatkowym wymaganiem, aby z każdego wiersza i każdej kolumny usunąć *dokładnie* 5 strzałek. Okazuje się, że nie zawsze jest to możliwe — czasami aby pozbyć się wszystkich par strzałek wskazujących na siebie nawzajem *trzeba* usunąć co najmniej 6 strzałek z pewnego wiersza lub kolumny. Przykładowo jeśli w pewnych czterech kolejnych kolumnach początkowe ułożenie strzałek jest takie, jak na rysunku 20, to z co najmniej jednej z tych czterech kolumn trzeba usunąć co najmniej 6 strzałek.

---

7. Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n-cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie

Sposób I

Rozpatrzymy najpierw przypadek, w którym wszystkie wybrane cyfry są równe 1. Przyjmijmy oznaczenie $A_n = 111\ldots 1$ dla liczby zapisanej za pomocą n jedynek. Wykażemy, że A_n jest liczbą podzielną przez 7 dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Zauważmy, że $A_{k+1}=10\cdot A_k+1$, skąd wniosek, że reszta z dzielenia przez 7 liczby A_{k+1} jest jednoznacznie wyznaczona przez resztę z dzielenia przez 7 liczby A_k. Bezpośrednio sprawdzamy, że reszty z dzielenia przez 7 liczb A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 wynoszą kolejno 1, 4, 6, 5, 2, 0, 1. Jak widać A_7 daje tę samą resztę, co A_1, więc ciąg sześciu reszt 1, 4, 6, 5, 2, 0 będzie powtarzał się okresowo, a reszta równa 0 będzie pojawiała się na pozycjach podzielnych przez 6. To dowodzi postulowanej własności.

Jeżeli wszystkie wybrane cyfry są równe d (przy czym $d\neq 0$ i $d\neq 7$), to przy ich użyciu można zapisać wyłącznie liczbę $d\cdot A_n$, która jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy liczba A_n jest podzielna przez 7 (bo d nie jest liczbą podzielną przez 7).

Przypuśćmy teraz, że wybrano co najmniej dwie różne cyfry, wśród których są a i b, przy czym $a<b$. Rozważmy dowolną liczbę m zapisaną za pomocą wszystkich wybranych cyfr, której cyfrą jedności jest a, a cyfrą dziesiątek jest b, czyli liczbę postaci

$$m=100c+10b+a,$$

gdzie c jest pewną liczbą całkowitą nieujemną. Wówczas także liczba $m'=100c+10a+b$ jest ułożona z wszystkich wybranych cyfr, gdyż powstaje z m w wyniku zamiany miejscami ostatnich dwóch cyfr. Skoro obydwie liczby m i m' są podzielne przez 7, to także ich różnica

$$m-m'=100c+10b+a-(100c+10a+b)=9\cdot(b-a)$$

jest liczbą podzielną przez 7. W konsekwencji $b-a$ jest liczbą podzielną przez 7. Korzystając z tego, że $b>a$ oraz a i b są cyframi, otrzymujemy równość $b-a=7$, skąd uzyskujemy dwie możliwości: $a=1$ i $b=8$ oraz $a=2$ i $b=9$.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że jeśli pewne dwie wybrane cyfry są różne, to albo każda z wybranych cyfr jest równa 1 lub 8, albo każda z wybranych cyfr jest równa 2 lub 9.

W pierwszym przypadku odejmując od dowolnej n-cyfrowej liczby m ułożonej z wybranych cyfr liczbę A_n, uzyskamy liczbę, której każdą cyfrą jest 0 lub 7, a zatem liczbę podzielną przez 7. W związku z tym liczba m jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy liczba A_n jest podzielna przez 7, czyli — jak już wiemy — w przypadku, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

Podobnie w drugim przypadku odejmując liczbę $2\cdot A_n$ od dowolnej n-cyfrowej liczby m ułożonej z wybranych cyfr, uzyskamy liczbę, której każda cyfra jest równa 0 lub 7, a więc liczbę podzielną przez 7. Wynika z tego, że m dzieli się przez 7 dokładnie wtedy, gdy $2\cdot A_n$ dzieli się przez 7, czyli gdy n dzieli się przez 6.

Sposób II

Niech a będzie dowolną wybraną cyfrą, a m — dowolną liczbą $(n-1)$-cyfrową złożoną z pozostałych wybranych cyfr. Ponieważ liczby

$$10m+a \quad \text{oraz} \quad 10^{n-1}\cdot a+m$$

są podzielne przez 7, więc także liczba

$$10\cdot(10^{n-1}\cdot a+m)-(10m+a)=a\cdot(10^n-1)$$

jest podzielna przez 7. Ponieważ a nie jest liczbą podzielną przez 7, więc wynika z tego, że $10^n-1=999\ldots9=9\cdot111\ldots1$ dzieli się przez 7. To zaś oznacza (jak udowodniliśmy w pierwszym sposobie), że n dzieli się przez 6.