STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OM

2015
ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

mFundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy OMG

Poziom OM
2015 rok

WARSZAWA 2015

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Autorzy rozwiązań: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jarosław Wróblewski

Recenzenci: dr Jerzy Bednarczuk, dr Waldemar Pompe

Skład komputerowy: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jarosław Wróblewski

Rysunki: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-12-9

Nakład: 1000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OM, który odbył się w dniach od 24 do 30 maja 2015 roku w miejscowości Szczyrk (woj. śląskie), w ośrodku *Gronik*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na zawodach trzeciego stopnia X edycji OMG (2014/2015):

Hubert Budzyński, Aleksandra Cynk, Łukasz Czyż, Jadwiga Czyżewska, Szymon Doradziński, Jan Dziuba, Filip Gawron, Konstanty Jeleński, Łukasz Kamiński, Rafał Kilar, Natalia Kucharczuk, Maksymilian Kulicki, Weronika Lorenczyk, Maciej Maruszczak, Paweł Pawlik, Adam Prystupiuk, Paweł Rosłoniec, Stanisław Strzelecki, Kinga Sztonyk oraz Adam Tłuczkiewicz.

Kadrę Obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe, Tomasz Szymczyk oraz Jarosław Wróblewski.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	6	12	0	2
2.	2	0	1	17
3.	11	0	7	2
4.	8	6	1	5
5.	2	1	8	9
6.	5	0	0	15
7.	2	0	0	18
8.	11	3	1	5
9.	12	4	2	2
10.	1	0	3	16
11.	3	2	2	13
12.	1	1	1	17
13.	3	1	0	16
14.	6	1	2	11
15.	2	0	0	18
16.	0	1	0	19
17.	12	0	0	8
18.	13	0	0	7
19.	7	0	0	13
20.	1	0	0	19

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120°$. Dwusieczna kąta ACB przecina prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do boku BC w punkcie P, a prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do boku AC w punkcie Q. Wykaż, że $AQ = BP$.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite m o następującej własności: Dla każdej liczby całkowitej n spełniającej warunek

$$n^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

zachodzi

$$n \equiv \pm 1 \pmod{m}.$$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$ o następującej własności: Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d o iloczynie $abcd$ podzielnym przez n^3, co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n.

4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB = BC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P, a odcinki BD i CE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że proste AC i PQ są równoległe.

5. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste C, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$C(xy + yz + zx) \leqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x < y$ zachodzą nierówności

$$\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

7. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi i który posiada przekrój płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołki, będący wielokątem o nieparzystej liczbie boków.

8. Kwadrat o wymiarach 100×100 podzielono na $10\,000$ kwadratów jednostkowych, a następnie w każdym z czterech naroży usunięto kwadrat jednostkowy. Z tak powstałej figury o 9996 kwadratowych polach wycinamy prostokąty o wymiarach 1×3, tnąc tylko po liniach dotychczasowego podziału tak, aby każdy prostokąt składał się z trzech pól. Wyznacz największą liczbę prostokątów, jakie można wyciąć w ten sposób.

Drugie zawody indywidualne

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba 12^n-25 jest złożona.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC<BC$. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego należy punkt C, a punkt O jest środkiem tego okręgu. Okrąg opisany na trójkącie CMO przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L różnych od C. Punkty P i Q są rzutami odpowiednio punktów K i L na prostą AB. Wykaż, że $AB=2PQ$.

11. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość

$$(2+\sqrt{5})^k\cdot(3+\sqrt{5})^m=(1+\sqrt{5})^n\,.$$

12. Dodatnie liczby niewymierne α i β spełniają równość

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+1.$$

Zdefiniujmy $a_n=[n\cdot\alpha]$ oraz $b_n=[n\cdot\beta]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ Udowodnij, że każda nieujemna liczba całkowita występuje w ciągu (a_n) o jeden raz więcej niż w ciągu (b_n).

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Trzecie zawody indywidualne

13. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Styczna w punkcie A do okręgu o_1 przecina okrąg o_2 w punkcie D, a styczna w punkcie A do okręgu o_2 przecina okrąg o_1 w punkcie E, przy czym punkty D i E są różne od A oraz kąt DAE jest ostry. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ADE w punktach D i E przecinają się w punkcie C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

14. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają równość

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=n.$$

Udowodnij, że

$$\frac{a_1^{11}}{a_2^7}+\frac{a_2^{11}}{a_3^7}+\frac{a_3^{11}}{a_4^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7}+\frac{a_n^{11}}{a_1^7}\geqslant n.$$

15. Udowodnij, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych takich, że każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

16. Punkt D należy do boku BC trójkąta równobocznego ABC, przy czym liczba

$$\frac{BD}{CD}=a$$

jest wymierna. Z wierzchołka A w kierunku punktu D wypuszczono wiązkę lasera, która odbijała się od boków trójkąta zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnij, że po pewnej nieparzystej liczbie odbić wiązka trafiła do jednego z wierzchołków trójkąta ABC i wyznacz ten wierzchołek w zależności od a.

Czwarte zawody indywidualne

17. Każde dwa wierzchołki 13-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

18. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

19. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o wszystkich bokach równej długości, w którym $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 180^\circ$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że odcinek CP ma tę samą długość, co każdy z boków pięciokąta $ABCDE$.

20. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorami

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Udowodnij, że w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Mecz matematyczny

21. Dana jest liczba naturalna n oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Udowodnij, że $S_3 \cdot S_5 \leqslant S_2 \cdot S_6$, gdzie $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k$.

22. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A leżący na zewnątrz tego okręgu. Z punktu A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach K i L. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Okrąg o przechodzi przez punkty O i M oraz przecina okrąg ω w różnych punktach B i C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

23. W sześcianie o krawędzi 7 umieszczono 6 sześcianów o krawędzi 1 (niekoniecznie rozłącznych). Udowodnij, że w dużym sześcianie można umieścić kulę o promieniu 1 rozłączną ze wszystkimi sześcioma małymi sześcianami.
Uwaga: Przyjmujemy, że sześcian i kula zawierają punkty leżące na ich brzegu.

24. Każde dwa wierzchołki 1001-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Udowodnij, że można tak wybrać 11 wierzchołków tego 1001-kąta, aby wyznaczony przez nie 11-kąt wypukły miał co najmniej 10 boków tego samego koloru.

25. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, którego środkiem ciężkości jest punkt S. Prosta l przechodzi przez punkt S i przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Punkt P spełnia warunki $AL = PL$ oraz $BK = PK$. Udowodnij, że odległość punktu P od prostej l nie zależy od wyboru prostej l i punktu P.

26. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniają równości

$$a = 2c^2 - 1, \qquad b = 2a^2 - 1, \qquad c = 2b^2 - 1,$$
$$c = 4e^3 - 3e, \quad d = 4c^3 - 3c, \quad e = 4d^3 - 3d.$$

Czy stąd wynika, że $a = b = c = d = e = 1$?

27. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna $n > 2$, że

$$n^{n^n} \equiv 16 \pmod{p}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

28. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o. Proste zawierające środkowe AD, BE, CF tego trójkąta przecinają okrąg o odpowiednio w punktach K, L, M różnych od A, B, C. Prosta przechodząca przez A i równoległa do BC przecina okrąg o w punkcie P. Analogicznie dla punktów B i C definiujemy odpowiednio punkty Q i R. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

29. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a_1^{16}+a_2^{16}+a_3^{16}+\ldots+a_{61}^{16}=62\cdot a_{62}^{16}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a_1, a_2, $\ldots$, a_{62}.

30. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8+b^{48}+c^{49}+d^{120}+e^{121}=f^8$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f spełniających warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d,e,f)=1$.

31. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ punkty K, L, M, N, O, P są środkami odpowiednio przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB. Wyznacz stosunek pola sześciokąta $KLMNOP$ do pola sześciokąta $ABCDEF$.

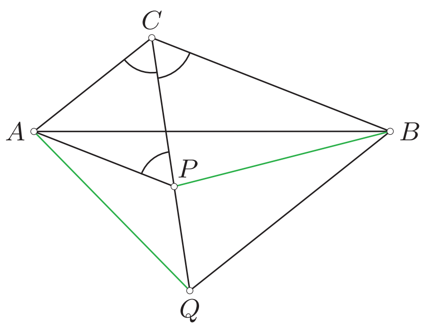
Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120°$. Dwusieczna kąta ACB przecina prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do boku BC w punkcie P, a prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do boku AC w punkcie Q. Wykaż, że $AQ = BP$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle PCB = \sphericalangle ACP = 60°$. Wynika stąd, że trójkąt APC jest równoboczny. Podobnie uzasadniamy, że trójkąt BCQ jest równoboczny. Wobec tego $AC = AP$, $CQ = CB$, a ponadto $\sphericalangle ACQ = 60° = \sphericalangle PCB$. Stąd wniosek, że trójkąty ACQ i PCB są przystające (cecha bok–kąt–bok), a zatem $AQ = BP$.



rys. 1

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite m o następującej własności: Dla każdej liczby całkowitej n spełniającej warunek

$$n^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

zachodzi

$$n \equiv \pm 1 \pmod{m}.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że m ma dwa różne nieparzyste dzielniki pierwsze p i q, czyli $m = p^\alpha q^\beta k$, gdzie $\alpha, \beta \geqslant 1$, a liczba k jest względnie pierwsza z p oraz z q.

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje rozwiązanie układu kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv 1 & \pmod{p^\alpha}, \\ n \equiv -1 & \pmod{q^\beta k}. \end{cases}$$

Przy tak dobranym n zachodzą związki

$$\begin{cases} n^2 \equiv 1 & \pmod{p^\alpha}, \\ n^2 \equiv 1 & \pmod{q^\beta k}, \end{cases}$$

co oznacza, że $n^2 \equiv 1 \pmod{m}$, ale nie jest prawdą, że $n \equiv \pm 1 \pmod{m}$.

Zauważmy, że zależność $n^2 \equiv 1 \pmod{m}$ jest równoważna podzielności $m|(n-1)(n+1)$.

Rozpatrzmy przypadek $m = p^\alpha$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Ponieważ liczby $n-1$ i $n+1$ nie mają wspólnych dzielników większych od 2, więc jeśli $p^\alpha|(n-1)(n+1)$, to zachodzi jedna z podzielności $p^\alpha|(n-1)$ lub $p^\alpha|(n+1)$, czyli warunek zadania jest spełniony.

Z kolei w przypadku $m = 2p^\alpha$ albo obie liczby $n-1$ i $n+1$ są podzielne przez 2, albo żadna z nich. Łącząc to z powyższą obserwacją otrzymujemy, że podzielność $2p^\alpha|(n-1)(n+1)$ pociąga za sobą jedną podzielności $2p^\alpha|(n-1)$ lub $2p^\alpha|(n+1)$, czyli liczby $m = 2p^\alpha$ również spełniają zadany warunek.

Jeśli $m = 2^t p^\alpha$, gdzie $t \geqslant 2$, to liczba $n = m/2 + 1 = 2^{t-1}p^\alpha + 1$ spełnia warunek $n^2 \equiv 1 \pmod{m}$, ale $n \not\equiv \pm 1 \pmod{m}$.

Podobnie, w przypadku $m = 2^t$, gdzie $t \geqslant 3$, kontrprzykład stanowi liczba $n = m/2 + 1 = 2^{t-1} + 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że w pozostałych przypadkach, czyli dla $m = 1$, $m = 2$ oraz $m = 4$, teza zadania zachodzi.

Podsumowując, warunki zadania spełniają liczby m postaci p^α oraz $2p^\alpha$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą, a także liczby 1, 2 oraz 4.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$ o następującej własności: Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d o iloczynie $abcd$ podzielnym przez n^3, co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby n, wchodzącym do jej rozkładu na czynniki pierwsze z wykładnikiem $\alpha \geqslant 1$, to znaczy $n = p^\alpha \cdot q$, gdzie $q \geqslant 1$ jest pewną liczbą naturalną względnie pierwszą z p.

Jeżeli $q > 1$, to liczba $p^{3\alpha}$ nie jest podzielna przez q, więc dla czwórki $(a,b,c,d) = (p^{3\alpha}, q^3, 1, 1)$ zachodzi podzielność $n^3|abcd$, ale n nie dzieli żadnej z liczb a, b, c, d. Stąd wynika, że aby liczba n mogła mieć postulowaną własność, musi zachodzić równość $q = 1$, czyli $n = p^\alpha$.

Jeżeli $\alpha \geqslant 4$, to $(a,b,c,d) = (p^{\alpha-1}, p^{\alpha-1}, p^{\alpha-1}, p^3)$ jest czwórką liczb, dla której $n^3 = p^{3\alpha}$ jest dzielnikiem liczby $abcd = p^{3\alpha}$, ale żadna z liczb a, b, c, d nie jest podzielna przez n.

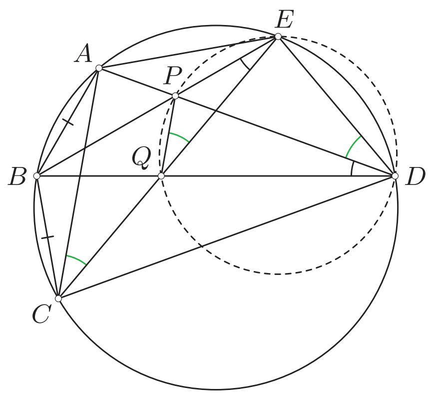
Pozostaje sprawdzić, że liczby postaci $n = p^\alpha$, gdzie $1 \leqslant \alpha \leqslant 3$, spełniają warunki zadania. Chcemy więc wykazać, że jeżeli liczba $abcd$ jest podzielna przez $n^3 = p^{3\alpha}$, to co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez p^α. Rzeczywiście, gdyby liczba p wchodziła do rozkładu na czynniki pierwsze każdej z tych czterech liczb z wykładnikiem co najwyżej $\alpha - 1$, to do iloczynu $abcd$ wchodziłaby z wykładnikiem nie większym od $4\cdot(\alpha-1) = 3\alpha - 1 + \alpha - 3 \leqslant 3\alpha - 1$. Wówczas jednak iloczyn $abcd$ nie byłby podzielny przez $n^3 = p^{3\alpha}$.

Podsumowując, warunki zadania spełniają liczby pierwsze, kwadraty liczb pierwszych, sześciany liczb pierwszych oraz liczba 1.

Zadanie 4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB = BC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P, a odcinki BD i CE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że proste AC i PQ są równoległe.

Rozwiązanie

Z równości cięciw $AB = BC$ okręgu opisanego na danym pięciokącie wynika równość $\sphericalangle PEQ = \sphericalangle PDQ$ kątów wpisanych w ten okrąg (rys. 2). Punkty D i E leżą po tej samej stronie prostej PQ, więc z ostatniej równości wynika, że punkty P, Q, D, E leżą na jednym okręgu. Zatem $\sphericalangle PQE = \sphericalangle PDE$. Z drugiej strony $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACE$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle PQE = \sphericalangle ACE$, a to oznacza, że proste AC i PQ są równoległe.



rys. 2

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste C, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$C\,(xy + yz + zx) \leqslant x^2 + y^2 + z^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Podstawiając do (1) liczby $x = y = z = 1$, uzyskujemy ograniczenie $C \leqslant 1$, a podstawiając do tej nierówności $x=1$, $y=0$, $z=-1$, otrzymujemy oszacowanie $-C \leqslant 2$, czyli $C \geqslant -2$.

Udowodnimy, że dla liczb $C \in [-2, 1]$ zachodzi nierówność (1).

Nierówność (1) ze stałą $C = -2$ jest równoważna prawdziwej nierówności $(x+y+z)^2 \geqslant 0$. Z kolei nierówność (1) ze stałą $C=1$ jest równoważna nierówności $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0$, która również jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z.

Spełnione są więc dwie nierówności

$$\begin{cases} \quad (xy + yz + zx) \leqslant x^2 + y^2 + z^2, \\ -2\,(xy + yz + zx) \leqslant x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

Ustalmy $\alpha \in [0, 1]$. Korzystając z powyższych nierówności, uzyskujemy

$$\begin{cases} \qquad \alpha\,(xy + yz + zx) \leqslant \alpha(x^2 + y^2 + z^2)\,, \\ -2(1-\alpha)\,(xy + yz + zx) \leqslant (1-\alpha)(x^2 + y^2 + z^2)\,. \end{cases}$$

Dodając stronami nierówności tego układu, otrzymujemy nierówność

$$(3\alpha-2)(xy+yz+zx) \leqslant x^2+y^2+z^2,$$

która dla każdego $\alpha \in [0,1]$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z. Dla tak dobranych α wyrażenie $C=3\alpha-2$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-2,1]$, więc dowód jest zakończony.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x<y$ zachodzą nierówności

$$\frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\cdot\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Rozwiązanie

Zapisując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1},\frac{x}{y},$$

otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} \leqslant \frac{n-1+\frac{y}{x}}{n}. \tag{1}$$

Równość w nierówności (1) zachodzi tylko dla $x=y$. Postawiony w treści zadania warunek $y>x$ oznacza więc, że nierówność (1) jest ostra. Po przekształceniach otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} < \frac{n-1+\frac{y}{x}}{n},$$

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{ny} < 1-\sqrt[n]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{y-x}{ny} < 1-\sqrt[n]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{(y-x)\sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x}.$$

Aby udowodnić nierówność

$$\sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\sqrt[n]{x}}{nx},$$

zapiszmy nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1},\frac{y}{x}$$

i podobnie jak wcześniej zauważmy, że nierówność jest ostra:

$$\sqrt[n]{\frac{y}{x}} < \frac{n-1+\dfrac{y}{x}}{n}.$$

Wobec tego, wykonując analogiczne przekształcenia, uzyskujemy

$$\sqrt[n]{\frac{y}{x}}-1 < \frac{y-x}{nx}, \qquad \sqrt[n]{y}-\sqrt[n]{x} < \frac{(y-x)\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Zadanie 7. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi i który posiada przekrój płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołki, będący wielokątem o nieparzystej liczbie boków.

Rozwiązanie

Sposób I

Zacznijmy od spostrzeżenia, że w dowolnym wielościanie wypukłym liczba wierzchołków, w których schodzi się nieparzysta liczba krawędzi jest parzysta.

Przypuśćmy, że istnieje wielościan V o własnościach opisanych w treści zadania. Rozważmy przekrój tego wielościanu będący $(2n+1)$-kątem i jedną z dwóch brył otrzymanych w wyniku rozcięcia wyjściowego wielościanu płaszczyzną przekroju nazwijmy W.

Zauważmy, że w każdym z tych wierzchołków wielościanu W, które są także wierzchołkami wielościanu V, schodzi się parzysta liczba krawędzi. Natomiast w każdym z $2n+1$ nowych wierzchołków schodzą się dokładnie trzy krawędzie: dwie będące bokami wielokąta otrzymanego w przekroju i jedna będąca fragmentem pewnej krawędzi wielościanu V.

Uzyskana sprzeczność dla V oznacza, że nie istnieje wielościan spełniający warunki zadania.

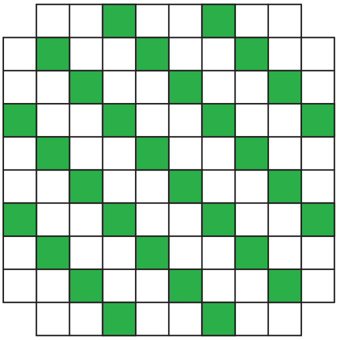
Sposób II

Zauważmy, że ściany wielościanu, w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi, można pomalować dwoma kolorami, powiedzmy czerwonym i niebieskim, w taki sposób, aby każde dwie ściany mające wspólną krawędź były różnego koloru. Wobec tego każdy przekrój płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołki jest wielokątem, którego boki pochodzą na zmianę ze ścian czerwonych i niebieskich, a więc wielokątem o parzystej liczbie boków.

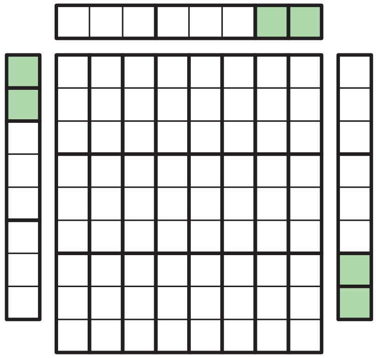
Zadanie 8. Kwadrat o wymiarach 100×100 podzielono na 10 000 kwadratów jednostkowych, a następnie w każdym z czterech naroży usunięto kwadrat jednostkowy. Z tak powstałej figury o 9996 kwadratowych polach wycinamy prostokąty o wymiarach 1×3, tnąc tylko po liniach dotychczasowego podziału tak, aby każdy prostokąt składał się z trzech pól. Wyznacz największą liczbę prostokątów, jakie można wyciąć w ten sposób.

Rozwiązanie

Pokolorujmy pola danej figury analogicznie do pokazanego na rysunku 3 kolorowania kwadratu 10×10 z usuniętymi narożnymi kwadratami jednostkowymi. Pól pokolorowanych jest wówczas 3330.



rys. 3



rys. 4

Zauważmy, że każdy prostokąt o wymiarach 1×3, który można wyciąć zgodnie z warunkami zadania, zawiera dokładnie jedno kolorowe pole. Stąd wniosek, że największa liczba prostokątów, jakie można wyciąć, nie przekracza liczby kolorowych pól, czyli 3330.

Pozostaje wskazać sposób wycięcia dokładnie 3330 prostokątów z danej figury (na rys. 4 przedstawiony jest analogiczny podział dla kwadratu 10×10). Daną figurę można podzielić na prostokąt 98×99, który da się w całości pociąć na prostokąty 1×3 oraz trzy prostokąty 1×98. Z każdego takiego prostokąta można wyciąć 32 prostokąty 1×3 i pozostają 2 pola. Łącznie wycięte prostokąty składają się więc z $9996 - 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3330$ pól, czyli jest ich 3330.

Drugie zawody indywidualne

Zadanie 9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba 12^n-25 jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to

$$12^n-25=(12^{\frac{n}{2}}-5)(12^{\frac{n}{2}}+5).$$

Ponieważ oba czynniki są liczbami całkowitymi większymi od 1, więc liczba 12^n-25 jest złożona.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 12^n-25 dzieli się przez 13. Rzeczywiście,

$$12^n-25\equiv(-1)^n+1\equiv-1+1\equiv0 \pmod{13}.$$

Ponadto dla $n>1$ liczba 12^n-25 jest większa od 13, więc jest złożona.

Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC<BC$. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego należy punkt C, a punkt O jest środkiem tego okręgu. Okrąg opisany na trójkącie CMO przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L różnych od C. Punkty P i Q są rzutami odpowiednio punktów K i L na prostą AB. Wykaż, że $AB=2PQ$.

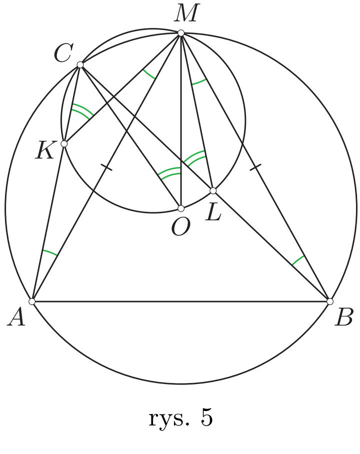
Rozwiązanie

Sposób I

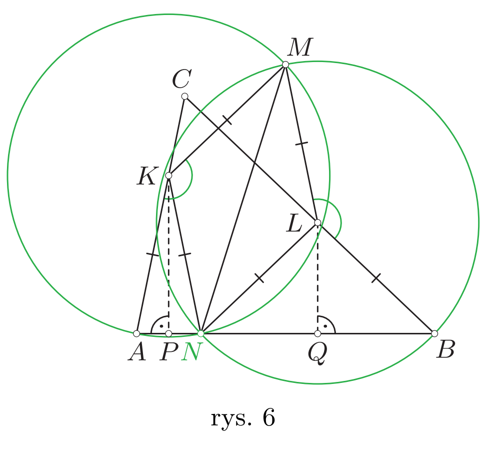
Z równości

$$\sphericalangle KAM+\sphericalangle AMK=\sphericalangle CKM=\sphericalangle COM=2\sphericalangle CAM=2\sphericalangle KAM$$

wynika, że $\sphericalangle AMK=\sphericalangle KAM$, czyli że trójkąt AKM jest równoramienny (rys. 5). Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle BML=\sphericalangle LBM$. Trójkąt BLM jest więc równoramienny. Ponadto $\sphericalangle KAM=\sphericalangle CAM=\sphericalangle CBM=\sphericalangle LBM$, więc trójkąty AKM i BLM są podobne. Co więcej, skoro M leży na symetralnej odcinka AB, to $AM=BM$, skąd wniosek, że omawiane trójkąty są przystające.



rys. 5



rys. 6

Oznaczmy przez N różny od M punkt przecięcia okręgów o środkach w punktach K i L oraz promieniu $KM = LM$ (rys. 6). Punkt N jest symetryczny do punktu M względem prostej KL, a zatem

$$\sphericalangle KMN - \sphericalangle KMA = \tfrac{1}{2}\sphericalangle KML - \sphericalangle KAM = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AMB - \sphericalangle KAM = \\ = 90^\circ - \sphericalangle BAM - \sphericalangle KAM = 90^\circ - \sphericalangle BAC > 0.$$

Stąd wynika, że $\sphericalangle KMN > \sphericalangle KMA$. Wobec tego, ponieważ punkt K znajduje się po przeciwnej stronie prostej AM niż punkt N oraz punkty L i N leżą po tej samej stronie prostej BM, więc z własności kątów wpisanych i środkowych uzyskujemy zależność

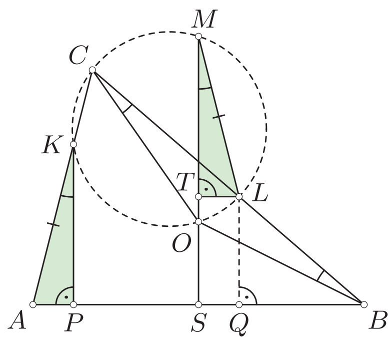
$$\sphericalangle ANM + \sphericalangle BNM = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle AKM + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BLM = 180^\circ.$$

To oznacza, że punkt N leży na odcinku AB. W takim razie, skoro $AK = NK$, to $AN = AP + PN = 2PN$ oraz analogicznie $BN = BQ + QN = 2QN$. Łącząc te zależności, otrzymujemy

$$AB = AN + BN = 2(PN + QN) = 2PQ.$$

Sposób II

Oznaczmy środek odcinka AB przez S, a rzut prostokątny punktu L na prostą MS przez T (rys. 7). Prosta MS jest symetralną odcinka AB, więc należy do niej punkt O. Punkt S należy do wnętrza odcinka PQ, gdyż punkty K i L leżą po przeciwnych stronach cięciwy OM okręgu opisanego na trójkącie CMO.



rys. 7

Zauważmy, że

$$\sphericalangle LMT = \sphericalangle LMO = \sphericalangle LCO = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle BOC = \\ = 90^\circ - \sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle PAK = \sphericalangle AKP.$$

To oznacza, że trójkąty prostokątne LMT i AKP są podobne. Co więcej, mają one równe przeciwprostokątne (co wykazujemy podobnie jak w poprzednim sposobie), a zatem są przystające. To oznacza, że $QS = LT = AP$ i w konsekwencji

$$PQ = PS + QS = PS + AP = AS = \tfrac{1}{2}AB,$$

co było do udowodnienia.

Zadanie 11. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość

$$(2+\sqrt{5})^k \cdot (3+\sqrt{5})^m = (1+\sqrt{5})^n\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d zachodzi równość $a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}$, to $a=c$ oraz $b=d$. Rzeczywiście, gdyby $b\neq d$, to powyższą równość moglibyśmy zapisać jako

$$\sqrt{5}=\frac{a-c}{d-b}\,,$$

co jest sprzeczne z niewymiernością liczby $\sqrt{5}$. W takim razie $b=d$ i w konsekwencji $a=c$.

Zauważmy ponadto, że iloczyn liczb postaci $x+y\sqrt{5}$, gdzie x, y są liczbami całkowitymi, również jest liczbą takiej postaci. Możemy się o tym przekonać, wykonując bezpośredni rachunek

$$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd)+(ad+bc)\sqrt{5}.$$

W szczególności wynika stąd, że iloczyn dowolnie wielu liczb postaci $x+y\sqrt{5}$ jest liczbą tej postaci.

Łącząc powyższe obserwacje dochodzimy do wniosku, że jeśli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi równość (1), to obie strony wspomnianej równości mają to samo przedstawienie w postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wobec tego także

$$(2-\sqrt{5})^k \cdot (3-\sqrt{5})^m = (1-\sqrt{5})^n\,, \tag{2}$$

gdyż z kolei obie strony tej równości są równe $a-b\sqrt{5}$. Rozwiązanie dokończymy trzema sposobami.

Sposób I

Ponieważ prawdziwe są nierówności $|2-\sqrt{5}|<1$ oraz $|3-\sqrt{5}|<1$, więc

$$|(2-\sqrt{5})^k \cdot (3-\sqrt{5})^m| = |2-\sqrt{5}|^k \cdot |3-\sqrt{5}|^m < 1^k \cdot 1^m = 1.$$

Ponadto zachodzi $|1-\sqrt{5}|>1$, wobec czego

$$|(1-\sqrt{5})^n| = |1-\sqrt{5}|^n > 1^n = 1.$$

Powyższe nierówności pozwalają stwierdzić, że wartości bezwzględne lewej i prawej strony równości (2) nie mogą być równe, a więc równość ta nie może być spełniona.

Sposób II

Wymnożenie stronami równości (1) i (2) prowadzi kolejno do

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{5})^k \cdot (2+\sqrt{5})^k \cdot (3-\sqrt{5})^m \cdot (3+\sqrt{5})^m &= (1-\sqrt{5})^n \cdot (1+\sqrt{5})^n\,,\\ (-1)^k \cdot 4^m &= (-4)^n\,,\\ (-1)^k \cdot 4^m &= (-1)^n \cdot 4^n\,.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $m=n$. Zachodzi jednak nierówność $3+\sqrt{5}>1+\sqrt{5}$, co w połączeniu z $m=n$ prowadzi do wniosku, że lewa strona równości (1) jest większa od jej prawej strony, a więc nie istnieją liczby k, m, n spełniające równość (1).

Sposób III

Zauważmy, że

$$(1+\sqrt{5})^2=2(3+\sqrt{5}) \quad \text{oraz} \quad (1+\sqrt{5})^3=8(2+\sqrt{5}).$$

Wyznaczając $3+\sqrt{5}$ oraz $2+\sqrt{5}$ z powyższych równości i podstawiając te wyniki do równości (1), otrzymujemy

$$\left(\frac{(1+\sqrt{5})^3}{2^3}\right)^k \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}\right)^m = (1+\sqrt{5})^n\,.$$

Przekształcając tę równość, uzyskujemy

$$(1+\sqrt{5})^{3k+2m-n}=2^{3k+m}\,.$$

Gdyby $3k+2m-n\neq 0$, to lewa strona powyższej równości byłaby liczbą niewymierną, a prawa wymierną. Stąd otrzymujemy, że $3k+2m-n=0$, a więc także $3k+m=0$. Jednak ostatnia równość nie może być spełniona dla dodatnich liczb k i m, gdyż suma liczb dodatnich jest dodatnia.

Odpowiedź

Nie istnieją liczby k, m, n spełniające warunki zadania.

Uwaga

Zmiana jednego znaku w treści zadania zmieniłaby konkluzję rozwiązania. Można bowiem sprawdzić, że ma miejsce równość

$$(2+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})=1+\sqrt{5}.$$

Zadanie 12. Dodatnie liczby niewymierne α i β spełniają równość

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+1.$$

Zdefiniujmy $a_n=[n\cdot\alpha]$ oraz $b_n=[n\cdot\beta]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ Udowodnij, że każda nieujemna liczba całkowita występuje w ciągu (a_n) o jeden raz więcej niż w ciągu (b_n).

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Rozwiązanie

Niech k będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Zdefiniujmy $A(k)$ jako tę liczbę całkowitą n, dla której spełnione są nierówności

$$n\alpha<k\leqslant(n+1)\alpha.$$

Symbol $A(k)$ oznacza więc liczbę wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od k. Stąd wynika, że liczba wyrazów ciągu (a_n) równych k wynosi $A(k+1)-A(k)$, a liczba wystąpień liczby zero w tym ciągu jest równa $A(1)$. Analogicznie definiujemy liczby $B(k)$.

Z warunku $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+1$ wynika, że $\alpha=\frac{\beta}{\beta+1}$ i wobec tego

$$\frac{A(k)\beta}{\beta+1}<k\leqslant\frac{(A(k)+1)\beta}{\beta+1},$$
$$A(k)\beta<k\beta+k\leqslant A(k)\beta+\beta,$$
$$(A(k)-k)\beta<k\leqslant(A(k)-k+1)\beta.$$

Stąd wniosek, że $B(k)=A(k)-k$, czyli $A(k)=B(k)+k$ dla każdego $k\geqslant 1$. W szczególności $A(1)=B(1)+1$, czyli zero występuje o jeden raz więcej w ciągu (a_n) niż w ciągu (b_n) oraz

$$A(k+1)-A(k)=B(k+1)+k+1-B(k)-k=B(k+1)-B(k)+1,$$

czyli k występuje o jeden raz więcej w ciągu (a_n) niż w ciągu (b_n).

Uwaga

Z uwagi na niewymierność liczb α i β, wszystkie nierówności w zaprezentowanym rozwiązaniu w istocie są ostre. Użycie nierówności nieostrych pozwoliło jednak na udowodnienie tezy zadania nie korzystając z założenia o niewymierności liczb α i β.

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie 13. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Styczna w punkcie A do okręgu o_1 przecina okrąg o_2 w punkcie D, a styczna w punkcie A do okręgu o_2 przecina okrąg o_1 w punkcie E, przy czym punkty D i E są różne od A oraz kąt DAE jest ostry. Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ADE w punktach D i E przecinają się w punkcie C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Sposób I

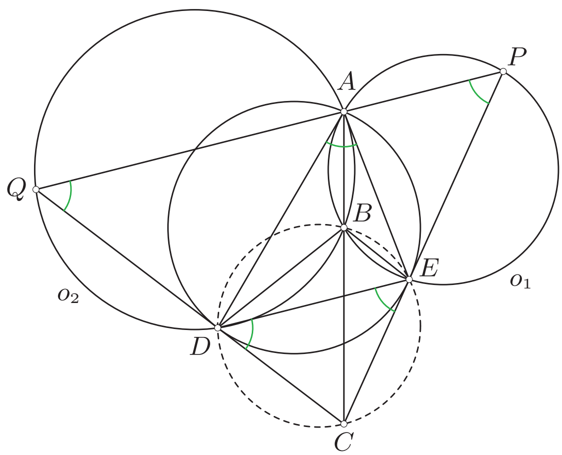
Niech proste CE i CD przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach P i Q (rys. 8). Przyjmijmy oznaczenie $\alpha = \sphericalangle DAE$.

Proste AD i CE są styczne odpowiednio do o_1 i okręgu opisanego na trójkącie ADE. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $\sphericalangle APE = \alpha = \sphericalangle DEC$. Wobec tego prosta AP jest równoległa do prostej DE. Analogicznie otrzymujemy, że $AQ \parallel DE$. Wobec tego punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle DBE = 360^\circ - \sphericalangle EBA - \sphericalangle ABD = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Stąd wynika, że $\sphericalangle DBE + \sphericalangle ECD = 2\alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$, więc czworokąt $DBEC$ jest wpisany w okrąg. Zatem $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC = \alpha = 180^\circ - \sphericalangle DBA$. To zaś oznacza, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.



rys. 8

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie dowodzimy, że punkt A leży na prostej PQ oraz że $\sphericalangle DQP = \sphericalangle QPE$, skąd uzyskujemy równość $CQ = CP$. Ponadto $CD = CE$. Zatem $CD \cdot CQ = CE \cdot CP$, czyli potęgi punktu C względem okręgów o_1 i o_2 są równe. Punkt C leży więc na osi potęgowej tych dwóch okręgów, czyli na prostej AB.

Zadanie 14. Dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniają równość

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=n.$$

Udowodnij, że

$$\frac{a_1^{11}}{a_2^7}+\frac{a_2^{11}}{a_3^7}+\frac{a_3^{11}}{a_4^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7}+\frac{a_n^{11}}{a_1^7}\geqslant n. \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie (o ciągach jednomonotonicznych)

Niech $x_1,x_2,\ldots,x_n$ oraz $y_1,y_2,\ldots,y_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozważamy wszystkie iloczyny postaci

$$x_{p(1)}y_{q(1)}+x_{p(2)}y_{q(2)}+\ldots+x_{p(n)}y_{q(n)},$$

gdzie $(p(1), p(2), \ldots, p(n))$ oraz $(q(1), q(2), \ldots, q(n))$ są permutacjami zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Wówczas minimalną wartość ma iloczyn otrzymany dla permutacji p i q spełniających warunki

$$x_{p(1)}\leqslant x_{p(2)}\leqslant\ldots\leqslant x_{p(n)} \quad \text{oraz} \quad y_{q(1)}\geqslant y_{q(2)}\geqslant\ldots\geqslant y_{q(n)}.$$

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Zdefiniujmy ciągi

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(a_1^{11}, a_2^{11}, \ldots, a_n^{11}), \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)=\left(\frac{1}{a_1^7}, \frac{1}{a_2^7}, \ldots, \frac{1}{a_n^7}\right).$$

Niech permutacja $(r(1), r(2), \ldots, r(n))$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ będzie permutacją porządkującą wyrazy ciągu x nierosnąco, to znaczy

$$x_{r(1)}\leqslant x_{r(2)}\leqslant\ldots\leqslant x_{r(n)}.$$

Zauważmy, że wówczas także

$$y_{r(1)}\geqslant y_{r(2)}\geqslant\ldots\geqslant y_{r(n)}.$$

Z przytoczonego na początku twierdzenia wynika więc, że dla dowolnych permutacji $(p(1), p(2), \ldots, p(n))$ oraz $(q(1), q(2), \ldots, q(n))$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność

$$x_{p(1)}y_{q(1)}+x_{p(2)}y_{q(2)}+\ldots x_{p(n)}y_{q(n)}\geqslant$$
$$\geqslant x_{r(1)}y_{r(1)}+x_{r(2)}y_{r(2)}+\ldots x_{r(n)}y_{r(n)}.$$

W szczególności prawdziwe są nierówności

$$\frac{a_1^{11}}{a_2^7}+\frac{a_2^{11}}{a_3^7}+\frac{a_3^{11}}{a_4^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7}+\frac{a_n^{11}}{a_1^7}=$$
$$=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+\ldots+x_{n-1}y_n+x_ny_1\geqslant$$
$$\geqslant x_{r(1)}y_{r(1)}+x_{r(2)}y_{r(2)}+x_{r(3)}y_{r(3)}+\ldots+x_{r(n-1)}y_{r(n-1)}x_{r(n)}y_{r(n)}=$$
$$=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_{n-1}y_{n-1}+x_ny_n=$$
$$=\frac{a_1^{11}}{a_1^7}+\frac{a_2^{11}}{a_2^7}+\frac{a_3^{11}}{a_3^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_{n-1}^7}+\frac{a_n^{11}}{a_n^7}=$$
$$=a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_{n-1}^4+a_n^4,$$

skąd uzyskujemy

$$\frac{a_1^{11}}{a_2^7}+\frac{a_2^{11}}{a_3^7}+\frac{a_3^{11}}{a_4^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7}+\frac{a_n^{11}}{a_1^7}\geqslant a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_{n-1}^4+a_n^4\,. \qquad (2)$$

Zauważmy teraz, że zapisując nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną dla liczb $(a_1^2,\,a_2^2,\,\ldots,\,a_n^2)$, uzyskujemy

$$\sqrt{\frac{\left(a_1^2\right)^2+\left(a_2^2\right)^2+\ldots+\left(a_n^2\right)^2}{n}}\geqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}. \qquad (3)$$

Analogicznie, dla liczb $(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n)$ otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \qquad (4)$$

Łącząc wyniki otrzymane w nierównościach (2), (3), (4) i korzystając z równości podanej w założeniu zadania, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{a_1^{11}}{a_2^7}+\frac{a_2^{11}}{a_3^7}+\frac{a_3^{11}}{a_4^7}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{11}}{a_n^7}+\frac{a_n^{11}}{a_1^7}&\geqslant\\ &\geqslant a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_{n-1}^4+a_n^4\geqslant\\ &\geqslant\frac{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2\right)^2}{n}\geqslant\\ &\geqslant\frac{\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n\right)^4}{n^3}=\frac{n^4}{n^3}=n\,.\end{aligned}$$

To kończy dowód nierówności (1).

Uwaga

Zamiast dwukrotnie używać szacowania z wykorzystaniem nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną, można powołać się na nierówność między średnią potęgową stopnia 4 a średnią arytmetyczną, uzyskując w ten sposób bezpośrednio nierówność

$$\sqrt[4]{\frac{a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Zadanie 15. Udowodnij, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych takich, że każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

Rozwiązanie

Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje liczba naturalna $n>50$, która spełnia układ kongruencji

$$\begin{cases} n\equiv 0 \pmod{50!},\\ n-1\equiv 0 \pmod{53},\\ n+1\equiv 0 \pmod{59}.\end{cases}$$

Wówczas dla $k=2,3,4,\dots,50$ liczby $n-k$ oraz $n+k$ dzielą się przez k, a więc każda z nich ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60. Ponadto liczba $n-1$ dzieli się przez 53, liczba n dzieli się przez 2, a liczba $n+1$ dzieli się przez 59. Wobec tego liczby $n-49$, $n-48$, $\dots$, $n+50$ spełniają warunki zadania.

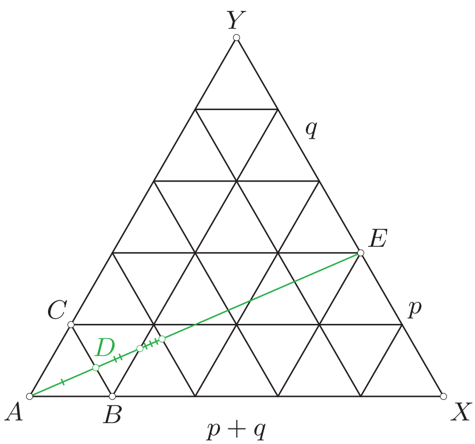
Zadanie 16. Punkt D należy do boku BC trójkąta równobocznego ABC, przy czym liczba

$$\frac{BD}{CD}=a$$

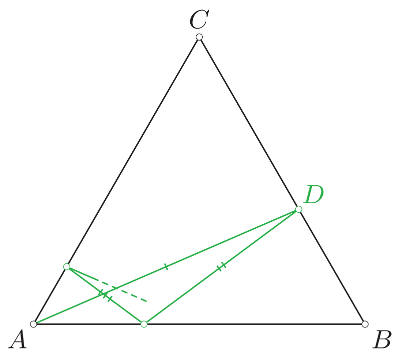
jest wymierna. Z wierzchołka A w kierunku punktu D wypuszczono wiązkę lasera, która odbijała się od boków trójkąta zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnij, że po pewnej nieparzystej liczbie odbić wiązka trafiła do jednego z wierzchołków trójkąta ABC i wyznacz ten wierzchołek w zależności od a.

Rozwiązanie

Niech $a=\frac{p}{q}$ będzie zapisem liczby a w postaci ułamka nieskracalnego. Przyjmijmy, że bok trójkąta ABC ma długość 1. Rozważmy trójkąt równoboczny AXY o boku $p+q$, podzielony na trójkąty równoboczne o boku 1 (nazwiemy je *małymi* trójkątami), z których jednym jest ABC (na rysunku 9 przyjmujemy $a=\frac{2}{3}$). Niech E będzie takim punktem odcinka XY, że $EX=p$ oraz $EY=q$.



rys. 9



rys. 10

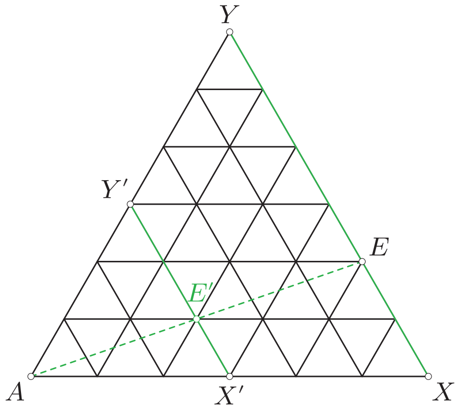
Zauważmy, że odcinek AE ma taką samą długość, jak łamana wyznaczana przez wiązkę lasera, a jego części znajdujące się wewnątrz małych trójkątów odpowiadają drodze wiązki między kolejnymi odbiciami od boków trójkąta ABC (rys. 10). Małe trójkąty są więc kopiami trójkąta ABC, a odcinek AE odzwierciedla drogę wiązki lasera. W szczególności punkt E odpowiada pewnemu wierzchołkowi trójkąta ABC znajdującemu się na drodze wiązki.

Ponieważ założyliśmy, że $a=\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, więc na odcinku AE nie leżą żadne wierzchołki małych trójkątów oprócz A i E. Rzeczywiście, gdyby istniał inny wierzchołek $E'\in X'Y'$, gdzie $X'\in AX$, $Y'\in AY$,

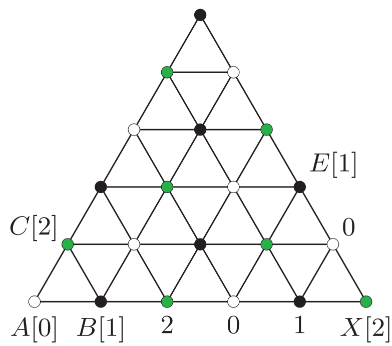
$X'Y' \parallel XY$ (rys. 11), to długości odcinków $X'E'$, $Y'E'$ byłyby liczbami całkowitymi, $X'E' < XE$, $Y'E' < YE$ oraz

$$\frac{X'E'}{Y'E'} = \frac{XE}{YE},$$

czyli ułamek $\frac{p}{q}$ można byłoby skrócić do $\frac{X'E'}{Y'E'}$. Stąd wynika, że punkt E odpowiada temu wierzchołkowi trójkąta ABC, do którego trafi wiązka lasera.



rys. 11



rys. 12

Przypiszmy wierzchołkom małych trójkątów odpowiadającym punktom A, B, C odpowiednio wartości 0, 1, 2 (rys. 12, wierzchołki oznaczone tą samą liczbą zaznaczone są tym samym kolorem). Zauważmy, że gdy poruszamy się najpierw po odcinku AX, a następnie po XE, numery kolejnych odwiedzanych wierzchołków rosną o 1 modulo 3. Stąd wniosek, że wierzchołkowi E odpowiada reszta z dzielenia liczby $2p+q$ przez 3. To oznacza, że wiązka lasera trafi do wierzchołka

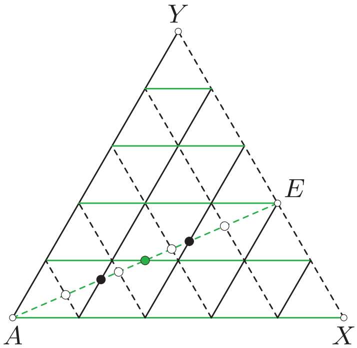
$$\begin{cases} A, \text{ jeżeli } 2p+q \equiv 0 \pmod 3, \\ B, \text{ jeżeli } 2p+q \equiv 1 \pmod 3, \\ C, \text{ jeżeli } 2p+q \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Obliczymy teraz liczbę odbić wiązki lasera zanim trafiła do pewnego wierzchołka. Zauważmy, że liczba ta jest równa liczbie punktów przecięcia odcinka AE z prostymi dzielącymi trójkąt AXY na małe trójkąty. Są trzy typy takich prostych: równoległe do boku AB, równoległe do boku BC i równoległe do boku CA (rys. 13). Punktów przecięcia z prostymi pierwszego typu jest $p-1$, z prostymi drugiego typu jest $p+q-1$, a z prostymi trzeciego typu jest $q-1$. Łącznie uzyskujemy $2(p+q)-3$, czyli nieparzystą liczbę odbić.

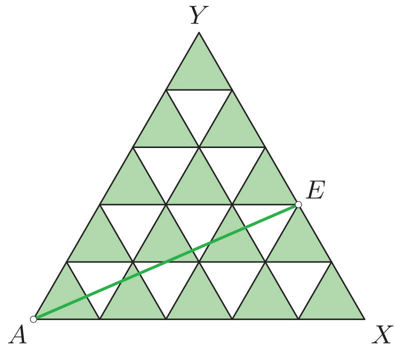
Uwaga 1.

To, że liczba odbić jest nieparzysta można uzasadnić również w następujący sposób. Pokolorujmy małe trójkąty w sposób przedstawiony na rysunku 14. Zauważmy, że skoro $60° < \sphericalangle AEX < 120°$, to w pobliżu punktu E

odcinek AE znajduje się wewnątrz białego małego trójkąta. Z kolei w pobliżu punktu A odcinek ten znajduje się wewnątrz trójkąta kolorowego. Odbiciu wiązki lasera odpowiada zmiana koloru małego trójkąta, przez który przechodzi odcinek AE. Ponieważ między punktami A i E kolor tła się zmienia, więc liczba odbić jest nieparzysta.



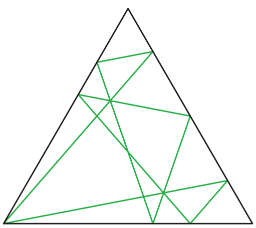
rys. 13



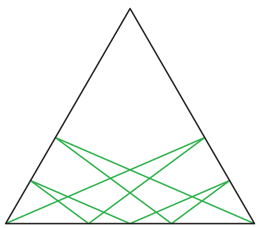
rys. 14

Uwaga 2.

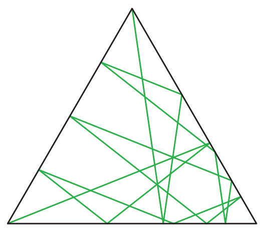
Na rysunkach 15, 16, 17 przedstawione są drogi wiązki lasera odpowiednio dla wartości $a=4$ $(2p+q\equiv 0 \pmod 3)$, $a=\frac{2}{3}$ $(2p+q\equiv 1 \pmod 3)$ oraz $a=\frac{3}{5}$ $(2p+q\equiv 2 \pmod 3)$.



rys. 15



rys. 16



rys. 17

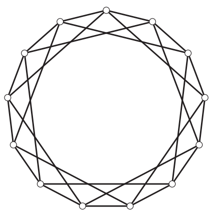
Czwarte zawody indywidualne

Zadanie 17. Każde dwa wierzchołki 13-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

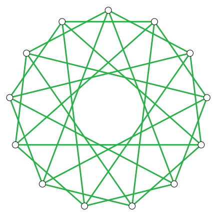
Rozwiązanie

Wskażemy takie pokolorowanie boków i przekątnych, że nie powstanie trójkąt o trzech bokach tego samego koloru.

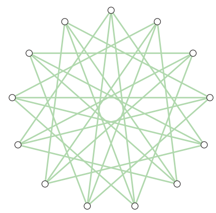
Pokolorujmy na czerwono boki oraz przekątne, których wierzchołki dzielą obwód na łamane złożone z 3 i 10 boków (rys. 18), na zielono przekątne, których wierzchołki dzielą obwód na łamane złożone z 2 i 11 lub 5 i 8 boków (rys. 19), a na niebiesko pozostałe przekątne (rys. 20).



rys. 18



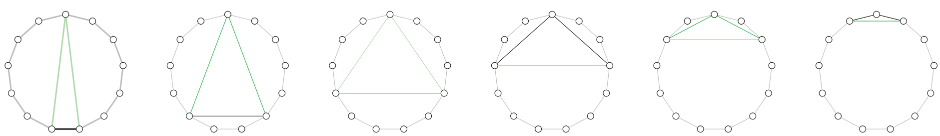
rys. 19



rys. 20

Przy takim kolorowaniu nie ma trójkąta o wszystkich bokach jednego koloru. Gdyby istniał taki trójkąt, to musiałby być równoramienny, gdyż odcinki w każdym z kolorów mogą mieć tylko dwie różne długości.

Istnieje dokładnie sześć różnych trójkątów równoramiennych o wierzchołkach w punktach 13-kąta foremnego (z dokładnością do obrotów). Są one przedstawione poniżej (rys. 21).



rys. 21

Żaden z powyższych trójkątów nie ma boków jednego koloru. Zatem nie ma trójkąta, którego wszystkie boki mają ten sam kolor.

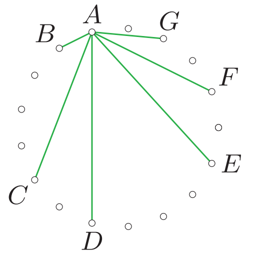
Zadanie 18. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

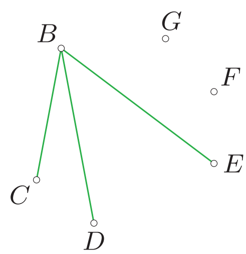
Udowodnimy, że odpowiedź na postawione pytanie jest twierdząca.

Rozważmy pewien wierzchołek A danego 17-kąta. Wychodzi z niego 16 odcinków, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne sześć z nich —

nazwijmy je AB, AC, AD, AE, AF, AG — jest tego samego koloru (rys. 22). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to kolor czerwony.



rys. 22



rys. 23

Jeżeli pewien odcinek łączący dwa z punktów B, C, D, E, F, G jest czerwony, to punkty te oraz punkt A są wierzchołkami trójkąta, którego wszystkie boki mają ten sam kolor — czerwony.

Jeżeli żaden z odcinków łączących pewne dwa z punktów B, C, D, E, F, G nie jest czerwony, to każdy z tych odcinków ma kolor zielony lub niebieski. Rozważmy wierzchołek B i odcinki BC, BD, BE, BF, BG (rys. 23). Z zasady szufladkowej wynika, że pewne trzy z nich mają ten sam kolor — bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to odcinki BC, BD, BE i że są one zielone.

Jeżeli któryś z odcinków CD, CE, DE jest zielony, (bez straty ogólności załóżmy, że jest to CD), to wszyskie boki trójkąta BCD są zielone.

Jeżeli żaden z odcinków CD, CE, DE nie jest zielony, to każdy z nich jest niebieski, a wtedy trójkąt CDE ma wszystkie boki tego samego koloru.

Zadanie 19. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o wszystkich bokach równej długości, w którym $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 180°$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że odcinek CP ma tę samą długość, co każdy z boków pięciokąta $ABCDE$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez r długość boku danego pięciokąta. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DEA + \sphericalangle EAB + \sphericalangle BCD = 540° - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE) = \\ = 540° - 180° = 360°.$$

Stąd wynika, że możemy wybrać taki punkt F znajdujący się na zewnątrz pięciokąta $ABCDE$, dla którego spełnione są równości

$$\sphericalangle DCF = \sphericalangle DEA,$$
$$\sphericalangle FCB = \sphericalangle EAB,$$

oraz $CF = r$ (rys. 24).

Na mocy cechy bok–kąt–bok,

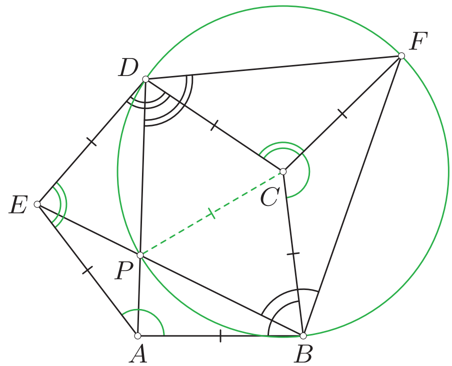
$$(\triangle BAE, \triangle BCF) \quad \text{oraz} \quad (\triangle DEA, \triangle DCF)$$

to pary trójkątów przystających. Wobec tego

$$\sphericalangle CBF = \sphericalangle ABE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDF = \sphericalangle EDA,$$

skąd $\sphericalangle PBF = \sphericalangle ABC$. Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle FDP = \sphericalangle CDE$.

Korzystając z danej w treści zadania równości $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 180°$, uzyskujemy więc że $\sphericalangle PBF + \sphericalangle FDP = 180°$, co oznacza, że na czworokącie $PBFD$ można opisać okrąg. Ponieważ $CB = CD = CF = r$, więc punkt C jest środkiem tego okręgu. Stąd również $CP = r$, co było do udowodnienia.



rys. 24

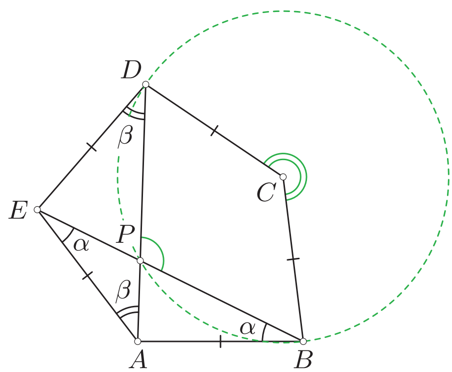
Sposób II

Niech $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = \alpha$, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = \beta$ (rys. 25). Wówczas

$$\sphericalangle BPD = \sphericalangle APE = 180° - \alpha - \beta$$

oraz $\sphericalangle EAB = 180° - 2\alpha$ i $\sphericalangle DEA = 180° - 2\beta$. Z danej w treści zadania równości kątów wynika, że $\sphericalangle DEA + \sphericalangle EAB + \sphericalangle BCD = 360°$, wobec czego miara kąta wklęsłego BCD jest równa

$$360° - \sphericalangle BCD = 360° - (360° - \sphericalangle DEA - \sphericalangle EAB) =$$
$$= 360° - 2\beta - 2\alpha = 2\sphericalangle BPD.$$



rys. 25

Rozważmy okrąg o środku w punkcie C i promieniu $CB = CD$. Ponieważ kąt wypukły BPD ma dwa razy mniejszą miarę od kąta wklęsłego BCD, który jest kątem środkowym rozważanego okręgu, więc punkt P należy do tego okręgu, co pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie 20. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorami

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{[\frac{n}{2}]} \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Udowodnij, że w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Rozwiązanie

Niech r_n oznacza resztę z dzielenia wyrazu a_n przez 7.

Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, dla której $r_k = 0$. Bezpośrednie obliczenia pozwalają wnioskować, że taka liczba istnieje, np. $a_7 = 7$. Zapisując dany wzór rekurencyjny dla wyrazów a_{2k}, a_{2k+1} i a_{2k+2}, uzyskujemy równości

$$\begin{cases} a_{2k+1} = a_{2k} + a_k, \\ a_{2k+2} = a_{2k+1} + a_k. \end{cases}$$

Ponieważ $r_k = 0$, więc z powyższych związków wynika, że $r_{2k} = r_{2k+1} = r_{2k+2}$. Oznaczmy wspólną wartość tych trzech wyrazów przez t.

Rozpatrzmy teraz wyrazy a_{4k}, a_{4k+1}, $\ldots$, a_{4k+6}. Otrzymujemy następujące równości

$$\begin{cases} a_{4k+1} = a_{4k} + a_{2k}, \\ a_{4k+2} = a_{4k+1} + a_{2k}, \\ a_{4k+3} = a_{4k+2} + a_{2k+1}, \\ a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{2k+1}, \\ a_{4k+5} = a_{4k+4} + a_{2k+2}, \\ a_{4k+6} = a_{4k+5} + a_{2k+2}, \end{cases}$$

co oznacza, że

$$\begin{cases} r_{4k+1} \equiv r_{4k} + r_{2k} \pmod 7, \\ r_{4k+2} \equiv r_{4k+1} + r_{2k} \pmod 7, \\ r_{4k+3} \equiv r_{4k+2} + r_{2k+1} \pmod 7, \\ r_{4k+4} \equiv r_{4k+3} + r_{2k+1} \pmod 7, \\ r_{4k+5} \equiv r_{4k+4} + r_{2k+2} \pmod 7, \\ r_{4k+6} \equiv r_{4k+5} + r_{2k+2} \pmod 7. \end{cases}$$

W połączeniu z wcześniejszymi wnioskami, uzyskujemy stąd

$$\begin{cases} r_{4k+1} \equiv r_{4k} + t \pmod 7, \\ r_{4k+2} \equiv r_{4k+1} + t \pmod 7, \\ r_{4k+3} \equiv r_{4k+2} + t \pmod 7, \\ r_{4k+4} \equiv r_{4k+3} + t \pmod 7, \\ r_{4k+5} \equiv r_{4k+4} + t \pmod 7, \\ r_{4k+6} \equiv r_{4k+5} + t \pmod 7, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} r_{4k+1} \equiv r_{4k} + \ t \pmod 7, \\ r_{4k+2} \equiv r_{4k} + 2t \pmod 7, \\ r_{4k+3} \equiv r_{4k} + 3t \pmod 7, \\ r_{4k+4} \equiv r_{4k} + 4t \pmod 7, \\ r_{4k+5} \equiv r_{4k} + 5t \pmod 7, \\ r_{4k+6} \equiv r_{4k} + 6t \pmod 7. \end{cases}$$

Jeśli $t=0$, to $r_{2k}=0$, czyli a_{2k} jest tym wyrazem ciągu (a_n) podzielnym przez 7, którego indeks jest większy od k.

Natomiast jeśli $t \neq 0$, to liczby $r_{4k}+mt$, dla $m=0,1,\ldots,6$, dają siedem różnych reszt przy dzieleniu przez 7. Zatem dokładnie jedna z tych siedmiu liczb jest podzielna przez 7, czyli jedna z liczb $r_{4k}, r_{4k+1}, \ldots, r_{4k+6}$ jest równa 0. W tym przypadku również uzyskaliśmy wyraz ciągu (a_n) o indeksie większym od k, który jest podzielny przez k. Jest to jeden z wyrazów $a_{4k}, a_{4k+1}, \ldots, a_{4k+6}$.

Wykazaliśmy, że $r_7=0$ oraz jeśli dla pewnego $k>0$ zachodzi $r_k=0$, to istnieje $l>k$ takie, że $r_l=0$. To oznacza, że w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

Uwaga

Występowanie w ciągu (a_n) liczb podzielnych przez 7 jest nieregularne, co można odczytać z poniższej tabeli.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a_n	1	1	2	3	4	5	7	9	12	15	19	23	28	33	40	47	56	65
r_n	1	1	2	3	4	5	0	2	5	1	5	2	0	5	5	5	0	2

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
a_n	77	89	104	119	138	157	180	203	231	259	292	325	365
r_n	0	5	6	0	5	3	5	0	0	0	5	3	1

Mecz matematyczny

Zadanie 21. Dana jest liczba naturalna n oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Udowodnij, że $S_3 \cdot S_5 \leqslant S_2 \cdot S_6$, gdzie $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$S_3 \cdot S_5 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^3 x_j^5 = \sum_{i=1}^{n} x_i^8 + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \left(x_i^3 x_j^5 + x_i^5 x_j^3\right)$$

i podobnie

$$S_2 \cdot S_6 = \sum_{i=1}^{n} x_i^8 + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \left(x_i^2 x_j^6 + x_i^6 x_j^2\right).$$

Teza zadania wynika z nierówności

$$a^3b^5 + a^5b^3 \leqslant a^2b^6 + a^6b^2,$$

którą dowodzimy przez następujące przekształcenia do postaci równoważnej:

$$a^2b^6 + a^6b^2 - a^3b^5 - a^5b^3 \geqslant 0,$$
$$a^2b^2 \cdot (b^4 + a^4 - ab^3 - a^3b) \geqslant 0,$$
$$a^2b^2 \cdot (b^3(b-a) + a^3(a-b)) \geqslant 0,$$
$$a^2b^2 \cdot (b^3 - a^3) \cdot (b-a) \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, gdyż dwa ostatnie czynniki iloczynu po lewej stronie są tego samego znaku.

Sposób II

Skorzystamy z nierówności Schwarza: jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są liczbami rzeczywistymi, to zachodzi nierówność

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dowód nierówności Schwarza

Jeżeli $a_1 = \ldots = a_n = 0$, to nierówność jest spełniona. Dalej będziemy zakładać, że co najmniej jedna z liczb $a_1, \ldots, a_n$ jest rózna od zera.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \geqslant 0.$$

Po otworzeniu nawiasów i przegrupowaniu wyrazów otrzymujemy

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant 0,$$

czyli równoważnie

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\left(x + \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\right)^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2 \geqslant \frac{(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Powyższa nierówność zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej x — przyjmijmy więc za x taką liczbę, że

$$x + \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = 0.$$

Otrzymaliśmy nierówność

$$b_1^2+\ldots+b_n^2 \geqslant \frac{(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2}{a_1^2+\ldots+a_n^2}$$

równoważną nierówności Schwarza.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Podstawmy w nierówności Schwarza $a_i=x_i^3$, $b_i=x_i^2$. Otrzymujemy

$$(x_1^5+\ldots+x_n^5)^2 \leqslant (x_1^6+\ldots+x_n^6)(x_1^4+\ldots+x_n^4)\,,$$

zatem $S_5^2 \leqslant S_6 \cdot S_4$.

Kładąc $a_i=x_i^3$, $b_i=x_i$ otrzymujemy $S_4^2 \leqslant S_6 \cdot S_2$, a kładąc $a_i=x_i^2$, $b_i=x_i$ uzyskujemy $S_3^2 \leqslant S_4 \cdot S_2$. Po przemnożeniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy

$$S_3^2 \cdot S_4^2 \cdot S_5^2 \leqslant S_2^2 \cdot S_4^2 \cdot S_6^2.$$

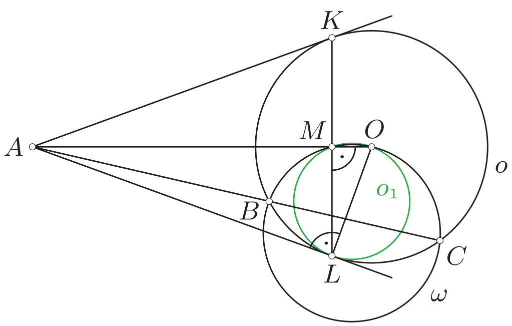
Jeżeli $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, to nierówność z zadania jest spełniona. W przeciwnym przypadku $S_4>0$ i wobec tego otrzymujemy $S_3^2 \cdot S_5^2 \leqslant S_2^2 \cdot S_6^2$, skąd $|S_3 \cdot S_5| \leqslant |S_2 \cdot S_6|$. Skoro $S_3 \cdot S_5 \leqslant |S_3 \cdot S_5|$ oraz $|S_2 \cdot S_6| = S_2 \cdot S_6$, to $S_3 \cdot S_5 \leqslant S_2 \cdot S_6$.

Zadanie 22. Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O oraz punkt A leżący na zewnątrz tego okręgu. Z punktu A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach K i L. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Okrąg o przechodzi przez punkty O i M oraz przecina okrąg ω w różnych punktach B i C. Wykaż, że punkty A, B, C leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie OML przez o_1.

Z symetrii rysunku wynika, że punkt M leży na odcinku AO. Kąty LMO oraz OLA są proste, więc prosta AL jest styczna do okręgu o_1 w punkcie L. Wobec tego okręgi o_1 i ω są styczne w punkcie L.



rys. 26

Prosta OM jest osią potęgową okręgów o_1 i o, prosta BC — osią potęgową okręgów ω i o, a prosta AL — osią potęgową okręgów ω i o_1. Wobec tego proste OM, BC, AL przecinają się w jednym punkcie. Zatem prosta BC przechodzi przez punkt A.

Zadanie 23. W sześcianie o krawędzi 7 umieszczono 6 sześcianów o krawędzi 1 (niekoniecznie rozłącznych). Udowodnij, że w dużym sześcianie można umieścić kulę o promieniu 1 rozłączną ze wszystkimi sześcioma małymi sześcianami.

Uwaga: Przyjmujemy, że sześcian i kula zawierają punkty leżące na ich brzegu.

Rozwiązanie

Sposób I (rozwiązanie kadry)

Dla każdego sześcianu jednostkowego rozważmy zbiór wszystkich punktów przestrzeni odległych od co najmniej jednego punktu tego sześcianu o nie więcej niż 1 (nazwijmy go *otoczeniem* sześcianu). Jednocześnie jest to zbiór wszystkich takich punktów O, że kula o środku O i promieniu 1 ma co najmniej jeden punkt wspólny z danym sześcianem jednostkowym. Zbiór ten jest sumą danego sześcianu, sześciu sześcianów jednostkowych zbudowanych na ścianach danego sześcianu, dwunastu ćwierćwalców (na krawędziach) oraz ośmiu oktantów kuli o promieniu 1 (w wierzchołkach). Objętość takiej figury jest równa

$$1+6+3\pi+\frac{4}{3}\pi=7+\frac{13}{3}\pi.$$

Rozważmy teraz otoczenia wszystkich sześciu sześcianów jednostkowych umieszczonych w danym sześcianie o krawędzi 7. Suma ich objętości jest równa

$$6\cdot\left(7+\frac{13}{3}\pi\right)=42+26\pi<42+26\cdot 3,15=42+81,9=123,9<125=5^3.$$

Wynika stąd, że co najmniej jeden punkt sześcianu o krawędzi 5, jednokładnego z danym sześcianem o krawędzi 7 względem punktu przecięcia jego przekątnych, nie należy do żadnego z sześciu otoczeń sześcianów jednostkowych. Kula o środku w tym punkcie i promieniu 1 spełnia warunki zadania.

Sposób II (rozwiązanie uczestników Obozu)

Umieśćmy w narożach danego sześcianu 8 kul o promieniu 1 stycznych do trójek ścian mających wspólny wierzchołek. Odległość między dowolnymi punktami różnych kul jest nie mniejsza od $7-2\cdot 2=3$. Tymczasem odległość między dowolnymi dwoma punktami sześcianu jednostkowego nie przekracza $\sqrt{3}$. To oznacza, że po umieszczeniu sześciu sześcianów jednostkowych wewnątrz danego sześcianu, co najmniej dwie kule będą miały niepuste przecięcie z sumą wnętrz umieszczonych sześcianów.

Uwaga

Drugi sposób rozwiązania pozwala na ograniczenie założeń zadania do sześcianu o krawędzi $4+\sqrt{3}$, wewnątrz którego można umieścić dwie kule.

Zadanie 24. Każde dwa wierzchołki 1001-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Udowodnij, że można tak wybrać 11 wierzchołków tego 1001-kąta, aby wyznaczony przez nie 11-kąt wypukły miał co najmniej 10 boków tego samego koloru.

Rozwiązanie

Oznaczmy kolejne wierzchołki 1001-kąta przez A_1, A_2, A_3, ..., A_{1001}. Każdemu wierzchołkowi A_k przypiszemy trójkę nieujemnych liczb całkowitych (c_k, z_k, n_k) zdefiniowanych następująco:
Rozważmy wszystkie łamane postaci $A_kA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_\ell}$, gdzie $k<i_1<i_2<\ldots<i_\ell$, a przy tym wszystkie odcinki łamanej są czerwone. Największą liczbę odcinków ℓ, z jakich może składać się taka łamana, oznaczymy przez c_k. Jeżeli takie łamane nie istnieją (czyli żaden odcinek A_kA_i dla $i>k$ nie jest czerwony), przyjmiemy $c_k=0$. Analogicznie przez z_k i n_k oznaczymy odpowiednio największą możliwą liczbę odcinków łamanej zielonej i niebieskiej.

Zauważmy, że jeżeli odcinek A_jA_k, gdzie $j<k$, jest czerwony, to wobec możliwości przedłużenia każdej czerwonej łamanej $A_kA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_\ell}$ do czerwonej łamanej $A_jA_kA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_\ell}$, zachodzi nierówność $c_j \geqslant c_k+1$. W szczególności $c_j \neq c_k$. Analogiczna uwaga dotyczy przypadków, gdy odcinek A_jA_k jest zielony lub niebieski, skąd wnioskujemy, że żadne dwa wierzchołki nie mają przypisanej tej samej trójki liczb. Ponieważ wierzchołków jest 1001, a trójek nieujemnych liczb całkowitych mniejszych od 10 tylko 1000, więc co najmniej jeden wierzchołek ma przypisaną trójkę, w której występuje liczba nie mniejsza od 10.

Przypuśćmy dla ustalenia uwagi, że $c_k \geqslant 10$. Wówczas istnieje łamana $A_kA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{10}}$ złożona z dziesięciu czerwonych odcinków, a przy tym spełniony jest warunek $k<i_1<i_2<\ldots<i_{10}$.

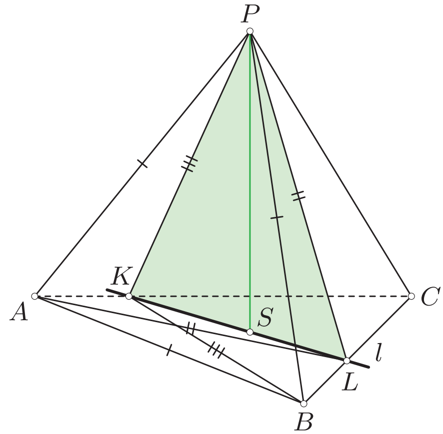
Oznacza to, że jedenastokąt $A_kA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{10}}$ ma co najmniej 10 boków czerwonych.

Zadanie 25. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, którego środkiem ciężkości jest punkt S. Prosta l przechodzi przez punkt S i przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Punkt P spełnia warunki $AL=PL$ oraz $BK=PK$. Udowodnij, że odległość punktu P od prostej l nie zależy od wyboru prostej l i punktu P.

Rozwiązanie

Jeżeli różne punkty P_1 i P_2 spełniają równości $BK=P_1K=P_2K$ oraz $AL=P_1L=P_2L$, to trójkąty KLP_1 i KLP_2 są przystające (cecha przystawania bok–bok–bok). Wobec tego odległości punktów P_1 i P_2 od prostej l są równe, jako wysokości trójkątów przystających poprowadzonych na tę samą podstawę. To oznacza, że szukana odległość nie zależy od wyboru punktu P spełniającego zadane równości.

Niech P będzie takim punktem przestrzeni, że czworościan $ABCP$ jest foremny (rys. 27). Zauważmy, że z równości $AB=AP$, $\sphericalangle BAK=\sphericalangle PAK=60^\circ$ wynika, że trójkąty ABK i APK są przystające (cecha bok–kąt–bok), a zatem $BK=PK$. Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty ABL i APL są przystające, skąd $AL=PL$. To oznacza, że tak zdefiniowany punkt P spełnia założenia zadania.



rys. 27

Odcinek PS, jako wysokość czworościanu foremnego $ABCD$, jest prostopadły do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt S i zawartej w płaszczyźnie ABC, w szczególności do prostej l. Tym samym odległość punktu P od prostej l jest równa $AB\sqrt{6}/3$, nie zależy więc od wyboru prostej l.

Zadanie 26. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniają równości

$$a = 2c^2 - 1, \qquad b = 2a^2 - 1, \qquad c = 2b^2 - 1,$$

$$c = 4e^3 - 3e, \quad d = 4c^3 - 3c, \quad e = 4d^3 - 3d.$$

Czy stąd wynika, że $a = b = c = d = e = 1$?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie wynika.

W rozwiązaniu skorzystamy ze wzorów

$$\cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 1 \quad \text{oraz} \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{1}$$

Przyjmijmy $\beta = \frac{1}{7} \cdot 360°$ i niech

$$c = \cos\beta, \quad a = \cos 2\beta, \quad b = \cos 4\beta, \quad d = \cos 3\beta, \quad e = \cos 9\beta.$$

Wówczas na podstawie wzorów (1) oraz równości

$$c = \cos\beta = \cos 8\beta = \cos 27\beta$$

stwierdzamy, że dany w zadaniu układ równań jest spełniony przez zdefiniowane wyżej liczby a, b, c, d, e.

Uwagi

W podanym wyżej rozwiązaniu $a = e$ oraz $b = d$.

Dwa inne rozwiązania danego układu równań otrzymujemy wychodząc od $c = \cos 2\beta$ lub $c = \cos 3\beta$.

Zadanie 27. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna $n > 2$, że

$$n^{n^n} \equiv 16 \pmod{p}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że w przypadku $p=2$ warunki zadania spełnia dowolna liczba parzysta $n>2$. W dalszej części rozwiązania ograniczymy się do przypadku, gdy p jest nieparzystą liczbą pierwszą.

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje rozwiązanie układu kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv 16 \pmod{p}, \\ n \equiv 1 \pmod{p-1}, \end{cases} \tag{1}$$

przy czym można założyć, że $n>2$. Ponieważ p jest nieparzystą liczbą pierwszą, z pierwszej kongruencji wnioskujemy, że liczba n nie jest podzielna przez p. Z drugiej kongruencji układu (1) wynika, że

$$n^n \equiv 1 \pmod{p-1}, \quad \text{czyli} \quad n^n = k\cdot(p-1)+1$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Z pierwszej kongruencji układu (1) oraz małego twierdzenia Fermata otrzymujemy

$$n^{n^n} = n^{k\cdot(p-1)+1} = (n^{p-1})^k \cdot n \equiv 1^k \cdot 16 = 16 \pmod{p},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

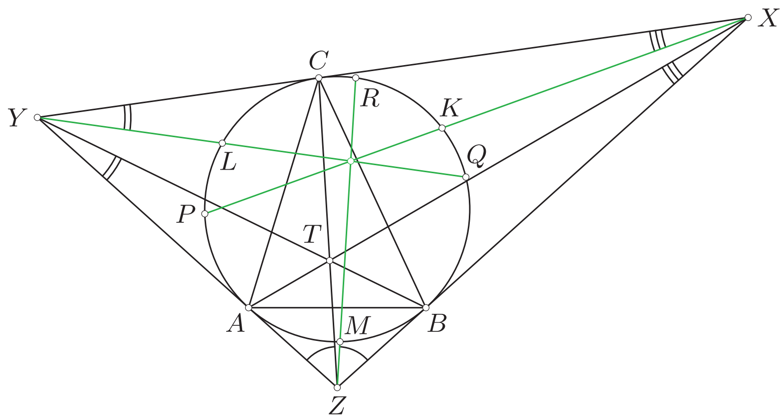
Zamiast powoływać się na chińskie twierdzenie o resztach, można po prostu wskazać rozwiązanie układu (1), a mianowicie $n=s\cdot p(p-1)-15p+16$.

Zadanie 28. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o. Proste zawierające środkowe AD, BE, CF tego trójkąta przecinają okrąg o odpowiednio w punktach K, L, M różnych od A, B, C. Prosta przechodząca przez A i równoległa do BC przecina okrąg o w punkcie P. Analogicznie dla punktów B i C definiujemy odpowiednio punkty Q i R. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

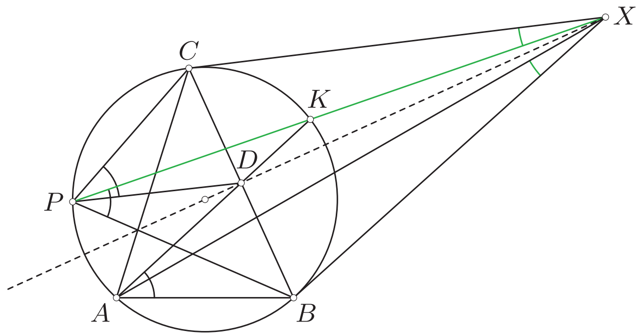
Niech a, b, c będą prostymi stycznymi do okręgu o odpowiednio w punktach A, B, C (rys. 28). Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio punkty przecięcia par prostych b i c, c i a, a i b. Wówczas proste AX, BY, CZ są symedianami trójkąta ABC. Wobec tego przecinają się one w jednym punkcie; oznaczmy ten punkt przez T.

Prosta XD zawiera średnicę okręgu o prostopadłą do cięciw BC i AP, więc jest symetralną tych dwóch odcinków (rys. 29). Wobec tego trójkąty ABX i PCX są symetryczne względem prostej XD. Wobec tego $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle BXA = \sphericalangle CXP$. Pierwsza równość wraz z faktem, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle BPK$ oznacza, że prosta PK jest symedianą trójkąta PBC. Stąd punkty X, K, P leżą na jednej prostej. Z drugiej równości otrzymujemy, że prosta KP jest izogonalnie sprzężona do prostej XA w kącie BXC.



rys. 28

Analogicznie dowodzimy, że proste LQ i MR są izogonalnie sprzężone odpowiednio do prostych YB i ZC odpowiednio w kątach CYA i AZB.



rys. 29

Wobec tego proste KP, LQ, MR przecinają się w punkcie izogonalnie sprzężonym do punktu T względem trójkąta XYZ.

Zadanie 29. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a_1^{16}+a_2^{16}+a_3^{16}+\ldots+a_{61}^{16}=62\cdot a_{62}^{16}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{62}$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Równanie nie ma rozwiązań.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dane w zadaniu równanie ma rozwiązania i spośród istniejących rozwiązań wybierzmy takie, w którym liczba a_{62} jest najmniejsza.

Skorzystajmy z tożsamości

$$a^{16}-1=(a^8+1)\cdot(a^4+1)\cdot(a^2+1)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$$

dla nieparzystej liczby całkowitej a. Po prawej stronie występuje iloczyn pięciu czynników parzystych, a ponadto jeden z ostatnich dwóch czynników jest podzielny przez 4. Zatem iloczyn ten jest podzielny przez $2^6=64$. Tak więc szesnasta potęga liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 64 resztę 1. Dodajmy do tego spostrzeżenie, że szesnasta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 64.

Zatem każdy z 61 składników występujących po lewej stronie danego równania daje przy dzieleniu przez 64 resztę 0 lub 1. W konsekwencji reszta z dzielenia sumy po lewej stronie równania przez 64 jest równa liczbie nieparzystych składników, jest więc liczbą z zakresu od 0 do 61. Z kolei prawa strona równania daje przy dzieleniu przez 64 resztę 0 lub 62. Aby równanie było spełnione, obie strony muszą być podzielne przez 64, a w konsekwencji wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{62}$ muszą być parzyste. Jednak wówczas liczby $a_1/2, a_2/2, \ldots, a_{62}/2$ tworzą mniejsze rozwiązanie równania, wbrew założeniu o minimalności rozwiązania wybranego na początku dowodu nie wprost.

Zadanie 30. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8+b^{48}+c^{49}+d^{120}+e^{121}=f^8 \tag{1}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f spełniających warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d,e,f)=1$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Równanie ma rozwiązania spełniające warunki zadania.

Ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$(x+y)^8=x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8 \tag{2}$$

oraz

$$(x-y)^8=x^8-8x^7y+28x^6y^2-56x^5y^3+70x^4y^4-56x^3y^5+28x^2y^6-8xy^7+y^8. \tag{3}$$

Odejmując stronami równości (2) i (3), dostajemy

$$(x+y)^8-(x-y)^8=16x^7y+112x^5y^3+112x^3y^5+16xy^7,$$

czyli

$$(x-y)^8+16x^7y+112x^5y^3+112x^3y^5+16xy^7=(x+y)^8. \tag{4}$$

Dobierzemy takie liczby x i y, aby składniki we wzorze (4) przejęły rolę składników równania (1). Niech

$$x=2^n \quad \text{oraz} \quad y=7^k. \tag{5}$$

Przyjmiemy

$$a=|x-y|=|2^n-7^k|, \qquad f=x+y=2^n+7^k \tag{6}$$

oraz

$$\begin{aligned} b^{48}&=16x^7y=2^{7n+4}\cdot 7^k,\\ c^{49}&=112x^5y^3=2^{5n+4}\cdot 7^{3k+1},\\ e^{121}&=112x^3y^5=2^{3n+4}\cdot 7^{5k+1},\\ d^{120}&=16xy^7=2^{n+4}\cdot 7^{7k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Aby liczby b, c, d i e określone równaniami (7) były całkowite, liczby n i k muszą spełniać następujące układy kongruencji:

$$\begin{cases} 7n+4 \equiv 0 \pmod{48}, \\ 5n+4 \equiv 0 \pmod{49}, \\ 3n+4 \equiv 0 \pmod{121}, \\ n+4 \equiv 0 \pmod{120} \end{cases} \tag{8}$$

oraz

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{48}, \\ 3k+1 \equiv 0 \pmod{49}, \\ 5k+1 \equiv 0 \pmod{121}, \\ 7k \equiv 0 \pmod{120}. \end{cases} \tag{9}$$

Mnożąc obie strony pierwszych trzech kongruencji układu (8) odpowiednio przez 7, 10 i 81, otrzymujemy równoważny układ

$$\begin{cases} n+28 \equiv 0 \pmod{48}, \\ n+40 \equiv 0 \pmod{49}, \\ n+82 \equiv 0 \pmod{121}, \\ n+4 \equiv 0 \pmod{120}, \end{cases} \tag{10}$$

który na mocy chińskiego twierdzenia o resztach ma rozwiązanie całkowite dodatnie n.

Podobnie, mnożąc obie strony ostatnich trzech kongruencji układu (9) odpowiednio przez 33, 97 i 103, otrzymujemy równoważny układ

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{48}, \\ k+33 \equiv 0 \pmod{49}, \\ k+97 \equiv 0 \pmod{121}, \\ k \equiv 0 \pmod{120}, \end{cases} \tag{11}$$

który na mocy chińskiego twierdzenia o resztach ma rozwiązanie całkowite dodatnie k.

Przyjmując za n i k dowolne rozwiązania układów kongruencji (10) i (11), otrzymujemy rozwiązanie równania (1) dane wzorami (5), (6) i (7).

Uwagi

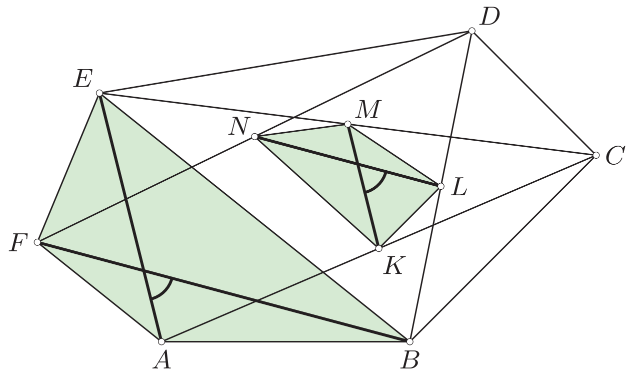
Przyjmując $x = 2^n \cdot s^{240\cdot 49\cdot 121} = 2^n \cdot s^{1422960}$ oraz $y = 7^k \cdot t^{1422960}$, gdzie liczba s jest niepodzielna przez 7, a t jest nieparzystą liczbą względnie pierwszą z s, otrzymujemy nieskończoną rodzinę rozwiązań.

Trzy inne rodziny rozwiązań otrzymamy, dokonując w równaniach (7) zamiany lewych stron środkowych równań lub zamiany lewych stron skrajnych równań lub obu tych zamian jednocześnie.

Zadanie 31. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ punkty K, L, M, N, O, P są środkami odpowiednio przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB. Wyznacz stosunek pola sześciokąta $KLMNOP$ do pola sześciokąta $ABCDEF$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez α miarę nie większego z kątów między prostymi AE i BF. Ponieważ $AE \parallel KM$ oraz $BF \parallel LN$, więc kąt między prostymi KM i LN również ma miarę α (rys. 30). Ponadto, $KM = \frac{1}{2}AE$ oraz $LN = \frac{1}{2}BF$.



rys. 30

Korzystając ze wzoru $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$ na pole czworokąta o przekątnych długości a, b przecinających się pod kątem φ, uzyskujemy

$$[KLMN] = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot LN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{AE}{2} \cdot \frac{BF}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}[ABEF],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że $[NOPK] = \frac{1}{4}[BCDE]$. Łącząc dwie uzyskane równości pól, otrzymujemy

$$[KLMNOP] = [KLMN] + [NOPK] = \frac{1}{4}([ABEF] + [BCDE]) = \frac{1}{4}[ABCDEF],$$

skąd wniosek, że szukany stosunek pól wynosi $1/4$.

Uwaga

Przedstawione rozumowanie jest poprawne również w przypadku, gdy co najmniej jeden z czworokątów $KLMN$, $NOPL$ jest wklęsły.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści