STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OMG

2015 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

mFundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy OMG

Poziom OMG
2015 rok

WARSZAWA 2015

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Autorzy rozwiązań: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Kamil Rychlewicz, Jarosław Wróblewski

Recenzenci: dr Jerzy Bednarczuk, dr Waldemar Pompe

Skład komputerowy: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Kamil Rychlewicz, Jarosław Wróblewski

Rysunki: Łukasz Bożyk

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-13-6

Nakład: 1000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OM, który odbył się w dniach od 31 maja do 6 czerwca 2015 roku w miejscowości Szczyrk (woj. śląskie), w ośrodku *Gronik*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na zawodach trzeciego stopnia X edycji OMG (2014/2015):

Mikołaj Tymon Bárdos, Michał Jan Bucoń, Jan Fabrowski, Jan Wojciech Fornal, Kamil Kajetan Galewski, Grzegorz Gruza, Maria Horodecka, Justyna Joanna Jaworska, Mateusz Kandybo, Konstanty Jakub Kraszewski, Piotr Kubaty, Arkadiusz Łukasz Pospieszny, Rafał Pyzik, Jakub Daniel Sola, Rafał Stanisław Szulc, Tomasz Jan Ślusarczyk, Tuan Anh Tran, Michał Umiński, Michał Bartłomiej Woźny oraz Radosław Żak.

Kadrę Obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Kamil Rychlewicz, Tomasz Szymczyk oraz Jarosław Wróblewski.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	19	1	0	0
2.	3	2	5	10
3.	11	1	7	1
4.	2	1	0	17
5.	10	3	0	7
6.	4	1	0	15
7.	2	1	0	17
8.	4	0	0	16
9.	3	1	0	16
10.	5	0	0	15
11.	3	1	0	16
12.	3	0	0	17
13.	7	1	1	11
14.	12	1	0	7
15.	3	0	0	17
16.	3	0	0	17
17.	17	1	0	2
18.	2	0	0	18
19.	20	0	0	0
20.	3	0	0	17
21.	6	0	0	14

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wyznacz sumę
$$\sphericalangle ACE+\sphericalangle BDA+\sphericalangle CEB+\sphericalangle DAC+\sphericalangle EBD.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 6$ o następującej własności: Spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać sześć wierzchołków wyznaczających sześciokąt, którego każdy bok ma długość nie większą od 1.

3. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n\geqslant 3$, umieszczono lampę i przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) dwóch lamp w wierzchołkach sąsiadujących z tym wierzchołkiem. Początkowo dwie lampy w kolejnych wierzchołkach są zapalone, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=90^\circ$. Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że
$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDF,\quad \sphericalangle BFD=\sphericalangle AFE,\quad \sphericalangle AEF=\sphericalangle BEC.$$
Udowodnij, że $AD+DF=BE+EF$.

5. Kwadrat o boku 107 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie narożnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

6. Kwadrat o boku 109 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie centralnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

7. Dany jest wielościan wypukły, którego każdą ścianę pomalowano na czerwono lub niebiesko w taki sposób, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź mają różny kolor. Wykaż, że jeśli w dany wielościan można wpisać sferę, to suma pól jego czerwonych ścian jest równa sumie pól jego niebieskich ścian.

Uwaga: Sferą wpisaną w wielościan nazywamy sferę styczną do każdej z jego ścian.

8. Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniających warunek
$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=n$$
zachodzi nierówność
$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1+x_nx_1x_2\leqslant n.$$

Drugie zawody indywidualne

9. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=6f^6$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty K i L są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach ABH i CKL przecinają się w punkcie P różnym od H. Wykaż, że punkty C, M, P leżą na jednej prostej.

11. Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 spełniających warunek

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6$$

zachodzi nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2 \leqslant 8.$$

12. Plansza do gry ma pięć pól umieszczonych w wierzchołkach pięciokąta foremnego. Dozwolony ruch polega na zabraniu dwóch żetonów z dowolnego pola, na którym jest więcej niż jeden żeton i położeniu jednego żetonu na następnym polu, licząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Początkowo na każdym polu znajduje się 2015 żetonów. Rozstrzygnij, czy wykonując ciąg dozwolonych ruchów można doprowadzić do stanu, w którym na planszy pozostanie mniej niż pięć żetonów.

Trzecie zawody indywidualne

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$AP+BP<AC+BC.$$

14. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek a, b, c dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$(a^2+1)\cdot(b^2+1)=c^2+1.$$

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 1 \qquad \text{oraz} \qquad 2x+3y+6z\geqslant 7$$

zachodzi nierówność $7xy\geqslant z$.

16. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $BD=DE=EA$. Udowodnij, że $\sphericalangle ABE=30^\circ$.

Czwarte zawody indywidualne

17. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f spełniają równanie

$$2ab+6bc+12cd+20de+30ef+6fa=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+25e^2+36f^2\,.$$

Udowodnij, że $af=bc$.

18. W turnieju szachowym startuje $2n$ zawodników, gdzie $n\geqslant 2$ jest liczbą naturalną. Udowodnij, że można tak zaplanować rozgrywki składające się z $2n-1$ rund, aby każdy szachista rozegrał z każdym innym dokładnie jedną partię szachów.

Uwaga: W każdej rundzie każdy z zawodników rozgrywa dokładnie jedną partię szachów.

19. Dwa przystające okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi w takich punktach C i D różnych od A, że punkt A należy do odcinka CD. Wykaż, że $BC=BD$.

20. Udowodnij, że istnieje 2015 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, które nie są postaci a^2b^3, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi.

21. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB=BD=DE$ oraz $AD=CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Mecz matematyczny

22. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2^2x_3^3 + x_2x_3^2x_4^3 + x_3x_4^2x_5^3 + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-2}x_{n-1}^2x_n^3 + x_{n-1}x_n^2x_1^3 + x_nx_1^2x_2^3 \leqslant x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + \ldots + x_n^6.$$

23. Przez punkt A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach B i C. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω w różnych punktach D i E. Prosta równoległa do DE przechodząca przez punkt B przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie X. Udowodnij, że prosta XC przechodzi przez środek odcinka DE.

24. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k istnieje taka liczba pierwsza $p > k$, że k liczb całkowitych bezpośrednio poprzedzających liczbę p, a także k liczb całkowitych bezpośrednio po niej następujących, to liczby złożone.

W rozwiązaniu możesz skorzystać bez dowodu z następującego twierdzenia Dirichleta: *Dla dowolnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a i b istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $a+bn$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.*

25. Udowodnij, że równanie $m^2 + n^2 = 6^k$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

26. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ACB = 120°$. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że $\measuredangle DFE = 90°$.

27. Udowodnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $r < p$ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b mniejsze od $\sqrt{p}$, że $ar \equiv \pm b \pmod{p}$.

28. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n \geqslant 4$, umieszczono lampę i przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) trzech lamp leżących w bezpośrednim sąsiedztwie tej lampy: dwóch w kierunku zegarowym i jednej w kierunku przeciwzegarowym. Początkowo jedna lampa jest zapalona, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

29. Rozstrzygnij, czy punkty płaszczyzny można pokolorować czterema kolorami w taki sposób, aby spełnione były następujące dwa warunki:
- każde koło o średnicy większej od 2 zawiera we wnętrzu punkty wszystkich czterech kolorów;
- każde koło o średnicy mniejszej od 1 zawiera we wnętrzu punkty co najwyżej dwóch kolorów.

30. Ciągi (a_n) i (b_n) są określone następującymi wzorami:

$$a_0 = 99\,999, \qquad a_1 = 1\,699\,999, \qquad b_0 = 1, \qquad b_1 = 5,$$

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - 9a_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+2} = 10b_{n+1} - 8b_n \quad \text{dla} \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Wykaż, że $a_{2015} < b_{2015}$.

31. Udowodnij, że sześcianu o krawędzi 61 nie można wypełnić klockami, z których każdy jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach $3 \times 3 \times 1$.

32. Pewne n wierzchołków $3n$-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Wierzchołki wielokąta należy pogrupować w n rozłącznych trójek takich, że każda zawiera dokładnie jeden czerwony wierzchołek. Udowodnij, że można to uczynić tak, aby każde dwa trójkąty wyznaczone przez różne trójki miały punkt wspólny.

Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie 1. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wyznacz sumę

$$\sphericalangle ACE+\sphericalangle BDA+\sphericalangle CEB+\sphericalangle DAC+\sphericalangle EBD.$$

Rozwiązanie

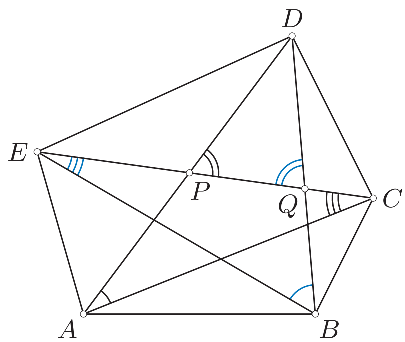
Oznaczmy przez P i Q punkty przecięcia prostej CE odpowiednio z odcinkami AD i BD (rys. 1). Zauważmy, że

$$\sphericalangle DPQ=180^\circ-\sphericalangle APC=\sphericalangle PAC+\sphericalangle PCA,$$
$$\sphericalangle DQP=180^\circ-\sphericalangle EQB=\sphericalangle QEB+\sphericalangle QBE.$$

Stąd wniosek, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACE+\sphericalangle BDA+\sphericalangle CEB+\sphericalangle DAC+\sphericalangle EBD=\\ =\sphericalangle PCA+\sphericalangle PDQ+\sphericalangle QEB+\sphericalangle PAC+\sphericalangle QEB=\\ =\sphericalangle DPQ+\sphericalangle DQP+\sphericalangle PDQ=180^\circ.\end{aligned}$$

Odpowiedź: Szukana suma kątów wynosi 180°.



rys. 1

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 6$ o następującej własności: Spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać sześć wierzchołków wyznaczających sześciokąt, którego każdy bok ma długość nie większą od 1.

Rozwiązanie

Niech $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ będzie pewnym sześciokątem wypukłym wyznaczanym przez sześć spośród wierzchołków danego n kąta oraz przyjmijmy, że A_1A_2 jest najdłuższym bokiem tego sześciokąta (lub jednym z najdłuższych, jeśli takich boków jest więcej). Oznaczmy ponadto przez O środek okręgu opisanego na danym n-kącie foremnym.

Przyjmijmy oznaczenie $\alpha_i=\sphericalangle A_iOA_{i+1}$ dla $i=1,\ldots,5$ oraz $\alpha_6=\sphericalangle A_6OA_1$. Wówczas α_1 jest największym z tych kątów.

Jeżeli punkt O leży wewnątrz sześciokąta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, to

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=360^\circ.$$

Jednak zgodnie z warunkami zadania mają miejsce nierówności $\alpha_i \leqslant 60^\circ$ dla $i=1,\ldots,6$. To oznacza, że w nierównościach tych muszą zachodzić równości, więc sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest foremny. Taka sytuacja jest możliwa tylko gdy liczba n jest podzielna przez 6.

Z kolei w przypadku, gdy punkt O znajduje się na zewnątrz sześciokąta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, prawdą jest, że

$$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6.$$

Sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ spełnia warunki zadania, o ile tylko $\alpha_1 \leqslant 60^\circ$. To oznacza, że łuk stanowiący $1/6$ okręgu opisanego na danym n-kącie foremnym zawiera co najmniej 6 wierzchołków tego wielokąta. Taka sytuacja jest możliwa tylko gdy $n \geqslant 30$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają wszystkie liczby naturalne nie mniejsze od 30 oraz te liczby mniejsze od 30, które są podzielne przez 6.

Zadanie 3. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n \geqslant 3$, umieszczono lampę i przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) dwóch lamp w wierzchołkach sąsiadujących z tym wierzchołkiem. Początkowo dwie lampy w kolejnych wierzchołkach są zapalone, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

Rozwiązanie

Ponumerujmy kolejne lampy liczbami $1,2,\ldots,n$.

Przypuśćmy, że n jest liczbą parzystą. Zauważmy, że każde użycie przełącznika zmienia stan pewnych dwóch lamp o numerach tej samej parzystości. Stąd wniosek, że parzystość liczby zapalonych lamp o numerach parzystych nie ulega zmianie na skutek wykonywania dozwolonych operacji. Skoro liczba ta na początku była nieparzysta, to nie jest możliwe, aby zgasić wszystkie lampy o numerach parzystych, a tym bardziej — doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

Jeżeli z kolei n jest liczbą nieparzystą, to załóżmy, że początkowo palą się lampy o numerach 1 i 2. Aby zgasić światło, wystarczy użyć kolejno przełączników przy lampach o numerach $3,5,7,\ldots,n$.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=90^\circ$. Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że

$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDF, \quad \sphericalangle BFD=\sphericalangle AFE, \quad \sphericalangle AEF=\sphericalangle BEC.$$

Udowodnij, że $AD+DF=BE+EF$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez A' i B' punkty symetryczne do punktów A i B odpowiednio względem punktu C (rys. 2). Wówczas czworokąt $ABB'A'$ jest rombem, gdyż jego przekątne dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym. Ponieważ

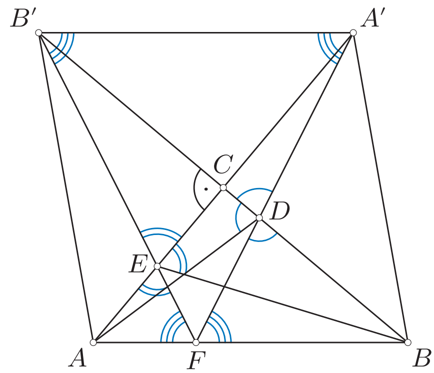
$$\sphericalangle BDF = \sphericalangle ADC = \sphericalangle A'DC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC = \sphericalangle B'EC,$$

więc punkty D i E należą odpowiednio do odcinków $A'F$ i $B'F$. Skoro proste AB i $A'B'$ są równoległe, to

$$\sphericalangle A'B'F = \sphericalangle AFB' = \sphericalangle BFA' = \sphericalangle B'A'F,$$

czyli trójkąt $A'B'F$ jest równoramienny. Stąd wniosek, że

$$AD + DF = A'D + DF = A'F = B'F = B'E + EF = BE + EF.$$



rys. 2

Sposób II

Oznaczmy przez F' i F'' punkty symetryczne do punktu F odpowiednio względem prostych AC i BC (rys. 3). Wówczas B, E, F' oraz A, D, F'' to trójki punktów współliniowych. Ponieważ

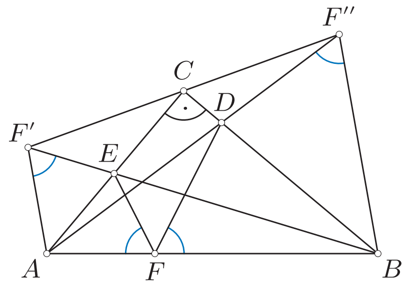
$$\sphericalangle AF'B = \sphericalangle AFE = \sphericalangle BFD = \sphericalangle BF''A,$$

więc na czworokącie $ABF''F'$ można opisać okrąg. Ponadto,

$$\sphericalangle F'AB + \sphericalangle ABF'' = 2(\sphericalangle FAC + \sphericalangle FBC) = 2 \cdot 90° = 180°,$$

skąd wniosek, że czworokąt $ABF''F'$ jest trapezem. Każdy trapez wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym, a zatem $AF'' = BF'$, czyli

$$AD + DF = AD + DF'' = AF'' = BF' = BE + EF' = BE + EF.$$



rys. 3

Uwaga

Można uzasadnić, że jeżeli istnieją punkty D, E, F spełniające warunki zadania, to są one jedyną trójką takich punktów oraz muszą zachodzić nierówności $30° < \sphericalangle ABC < 60°$.

Zadanie 5. Kwadrat o boku 107 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie narożnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki podział danej figury jest niemożliwy.

W tym celu podzielimy kwadrat 107×107 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, które ponumerujemy lub pokolorujemy w odpowiedni sposób.

Ponieważ $107 \equiv 3 \pmod 4$, a numerowania lub kolorowania będą okresowe w poziomie i pionie z okresem 4, więc sposób numerowania lub kolorowania danej figury przedstawimy na przykładzie kwadratu o wymiarach 11×11 z usuniętym polem z prawego dolnego narożnika.

Sposób I

Ponumerujmy pola danej figury jak na rysunku 4.

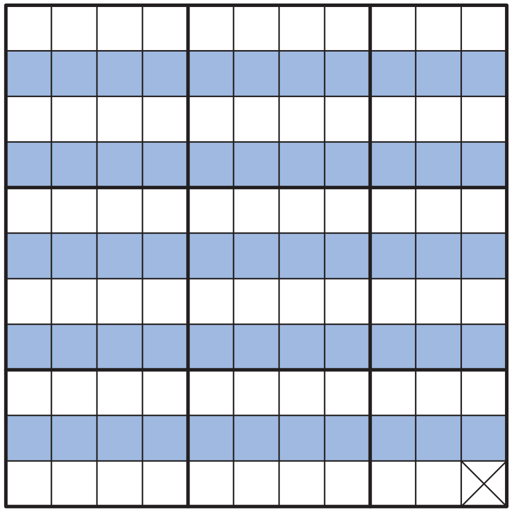
Zauważmy, że każdy prostokąt 1×4 pokrywający 4 pola zawsze pokrywa pola z różnymi numerami. Ponieważ prawe dolne naroże (zaznaczone kolorem) zawiera jedno pole z numerem 1 i trzy pola z numerem 3, a w pozostałej części danej figury liczby pól z numerami od 1 do 4 są równe, więc cała figura zawiera więcej pól z numerem 3 niż pól z numerem 1. Stąd wynika, że nie jest możliwe pokrycie danej figury zgodnie z warunkami zadania.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	

rys. 4

Sposób II

Pokolorujmy pola danej figury jak na rysunku 5.



rys. 5

Wówczas każdy prostokąt 1×4 pokrywający 4 pola zawsze pokrywa 0, 2 lub 4 zamalowane pola. Gdyby daną figurę można było wypełnić prostokątami 1×4, liczba zamalowanych pól byłaby parzysta. Tymczasem prawe dolne naroże zawiera trzy zamalowane pola, a liczba zamalowanych pól w pozostałej części danej figury jest parzysta.

Zadanie 6. Kwadrat o boku 109 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie centralnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

Rozwiązanie

Wykażemy, że takiej figury nie można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4. Przypuśćmy przeciwnie, że figura taka jest pokryta takimi prostokątami.

Wpiszmy w każdy kwadrat jednostkowy liczbę 1, 2, 3 lub 4 (rys. 6). Wtedy liczba 1 wpisana jest w 28 pełnych kolumn, czyli parzyście wiele — $28 \cdot 109$ kwadratów jednostkowych. Zatem liczba prostokątów pokrywających nieparzyście wiele z kwadratów z wpisaną liczbą 1 musi być parzysta. Jednakże prostokąty takie to dokładnie te, które ustawione są poziomo. Zatem mamy parzyście wiele prostokątów ustawionych poziomo.

Z drugiej strony liczba 2 wpisana jest w 27 pełnych kolumn, czyli nieparzyście wiele — $27 \cdot 109$ kwadratów jednostkowych. Zatem analogicznie mamy nieparzyście wiele prostokątów ustawionych poziomo. Jest to sprzeczność z wyżej uzyskanym rezultatem, co kończy dowód.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	×	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

rys. 6

Uwaga

Można zauważyć, że przeprowadzając analogiczne rozumowanie do powyższego, można uzyskać rozwiązanie poprzedniego zadania.

Zadanie 7. Dany jest wielościan wypukły, którego każdą ścianę pomalowano na czerwono lub niebiesko w taki sposób, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź mają różny kolor. Wykaż, że jeśli w dany wielościan można wpisać sferę, to suma pól jego czerwonych ścian jest równa sumie pól jego niebieskich ścian.

Uwaga: Sferą wpisaną w wielościan nazywamy sferę styczną do każdej z jego ścian.

Rozwiązanie

Niech AB będzie dowolną krawędzią danego wielościanu oraz niech S i T będą punktami styczności sfery s wpisanej w ten wielościan do dwóch ścian, których wspólną krawędzią jest AB.

Rozważmy przekrój wielościanu i sfery płaszczyzną AST. Ponieważ płaszczyzny ABS i ABT są styczne do sfery s, więc proste AS i AT są styczne do zawartego w płaszczyźnie AST okręgu będącego przekrojem sfery s. Stąd wniosek, że $AS = AT$. Analogicznie uzasadniamy, że $BS = BT$.

Na mocy cechy bok–bok–bok, trójkąty ABS i ABT są przystające, więc w szczególności mają one równe pola. Ale jeden z tych trójkątów jest zawarty w czerwonej ścianie, a drugi — w niebieskiej.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla pozostałych krawędzi wielościanu, dochodzimy do wniosku, że postulowana równość pól zachodzi, gdyż powierzchnia wielościanu ulega dekompozycji na pary trójkątów przystających, w każdej z których jeden jest czerwony, a drugi niebieski.

Zadanie 8. Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniających warunek

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=n$$

zachodzi nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1+x_nx_1x_2 \leqslant n.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Niech $n=6$ oraz $x_1=2$, $x_2=1{,}9$, $x_3=1{,}8$, $x_4=x_5=x_6=0{,}1$. Wówczas $x_1x_2x_3=6{,}84$, skąd wynika, że

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2>6=n.$$

Podany przykład liczbowy dowodzi, że odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

Sposób II

Niech $n=8$ oraz $x_1=3$, $x_2=3$, $x_3=1$, $x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=0{,}2$. Wówczas $x_1x_2x_3=9$, skąd wynika, że

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+\ldots+x_6x_7x_8+x_7x_8x_1+x_8x_1x_2>8=n.$$

Podany przykład liczbowy dowodzi, że odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

Uwaga

Dla każdego $n \geqslant 6$ można znaleźć ciąg liczb dodatnich $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o sumie n, który nie spełnia postulowanej nierówności. Co więcej, przy podanych założeniach, najlepszym możliwym oszacowaniem jest nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1+x_nx_1x_2<\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Drugie zawody indywidualne

Zadanie 9. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=6f^6$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f.

Rozwiązanie

Wykażemy, że dane równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f.

Poczynimy najpierw następujące spostrzeżenie: niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Jeżeli n nie dzieli się przez 7, to z małego twierdzenia Fermata $n^6 \equiv 1 \pmod 7$. Jeżeli zaś n dzieli się przez 7, to również n^6 dzieli się przez 7, czyli $n^6 \equiv 0 \pmod 7$.

Przypuśćmy, że równanie z treści zadania ma rozwiązanie i wybierzmy takie rozwiązanie (a,b,c,d,e,f), dla którego f jest możliwie najmniejsze.

Zastosujmy powyższe spostrzeżenie do liczb a, b, c, d, e, f. Otrzymujemy wtedy, że każda z liczb a^6, b^6, c^6, d^6, e^6, f^6 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 0 lub 1. Zatem suma $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6$ daje przy dzieleniu przez 7 resztę 0, 1, 2, 3, 4 lub 5, przy czym reszta z dzielenia tej sumy przez 7 jest równa liczbie tych spośród liczb a, b, c, d, e, które nie są podzielne przez 7.

Z drugiej strony, $6f^6$ daje przy dzieleniu przez 7 resztę 0 lub 6. Zatem skoro ma zachodzić równość $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=6f^6$, to obie strony muszą przy dzieleniu przez 7 dawać resztę 0. Wszystkie liczby a, b, c, d, e, f są więc podzielne przez 7. Stąd wynika, że

$$\left(\frac{a}{7}\right)^6+\left(\frac{b}{7}\right)^6+\left(\frac{c}{7}\right)^6+\left(\frac{d}{7}\right)^6+\left(\frac{e}{7}\right)^6=\left(\frac{f}{7}\right)^6,$$

więc $(\frac{a}{7},\frac{b}{7},\frac{c}{7},\frac{d}{7},\frac{e}{7},\frac{f}{7})$ także jest rozwiązaniem wyjściowego równania w dodatnich liczbach całkowitych, a przy tym $\frac{f}{7}<f$, co jest sprzeczne wyborem rozwiązania (a,b,c,d,e,f) jako minimalizującego f.

Uwaga

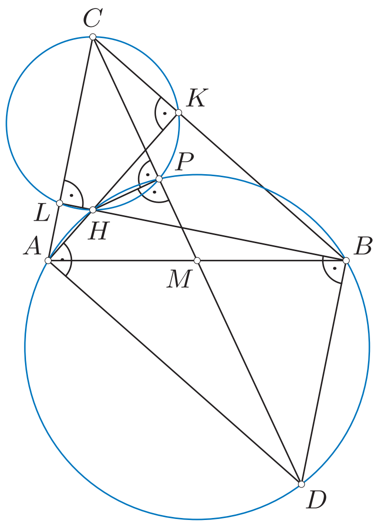
Można także wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba n^6 daje resztę 0 (gdy n dzieli się przez 2) lub 1 (gdy n nie dzieli się przez 2) przy dzieleniu przez 8, a następnie rozpatrywać reszty z dzielenia przez 8.

Analogicznie można również pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba n^6 daje resztę 0 (gdy n dzieli się przez 3) lub 1 (gdy n nie dzieli się przez 3) przy dzieleniu przez 9, a następnie rozpatrywać reszty z dzielenia przez 9.

Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty K i L są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach ABH i CKL przecinają się w punkcie P różnym od H. Wykaż, że punkty C, M, P leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ACBD$ jest równoległobokiem (rys. 7). Równości kątów $\sphericalangle DBH = \sphericalangle DAH = 90°$ oznaczają, że odcinek HD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABH. W szczególności $\sphericalangle DPH = 90°$.



rys. 7

Podobnie, ponieważ $\sphericalangle CKH = \sphericalangle CLH = 90°$, więc odcinek CH jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie CKL i stąd $\sphericalangle CPH = 90°$. Łącząc uzyskane równości, otrzymujemy

$$\sphericalangle DPH + \sphericalangle CPH = 180°,$$

co oznacza, że punkt P leży na prostej CD. To kończy rozwiązanie, gdyż punkt M również leży na tej prostej, jako środek odcinka CD.

Zadanie 11. Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 spełniających warunek

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$$

zachodzi nierówność

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2 \leqslant 8.$$

Rozwiązanie

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{(x_1+x_4)+(x_2+x_5)+(x_3+x_6)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6)},$$

czyli

$$(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6) \leqslant \left(\frac{(x_1+x_4)+(x_2+x_5)+(x_3+x_6)}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8.$$

Wymnażając nawiasy po lewej stronie powyższej nierówności, uzyskujemy

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2+x_1x_3x_5+x_2x_4x_6 \leqslant 8.$$

Ponieważ $x_1x_3x_5 \geqslant 0$ oraz $x_2x_4x_6 \geqslant 0$, więc lewa strona jest nie mniejsza niż

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2.$$

Zatem

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2 \leqslant 8,$$

czego należało dowieść.

Zadanie 12. Plansza do gry ma pięć pól umieszczonych w wierzchołkach pięciokąta foremnego. Dozwolony ruch polega na zabraniu dwóch żetonów z dowolnego pola, na którym jest więcej niż jeden żeton i położeniu jednego żetonu na następnym polu, licząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.
Początkowo na każdym polu znajduje się 2015 żetonów. Rozstrzygnij, czy wykonując ciąg dozwolonych ruchów można doprowadzić do stanu, w którym na planszy pozostanie mniej niż pięć żetonów.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy wierzchołki pięciokąta foremnego odpowiednio przez A, B, C, D, E, oznaczając je w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

W zależności, w którym polu znajduje się żeton, przypiszmy mu następującą liczbę:

w wierzchołku A — liczbę **1**,
w wierzchołku B — liczbę **2**,
w wierzchołku C — liczbę **4**,
w wierzchołku D — liczbę **8**,
w wierzchołku E — liczbę **16**

i zauważmy, że każdy z dozwolonych ruchów albo nie zmienia sumy liczb przypisanych żetonom znajdującym się na planszy, albo zmniejsza tę sumę o 31.

Początkowo suma liczb przypisanych żetonom znajdującym się na planszy jest równa

$$2015\cdot 1+2015\cdot 2+2015\cdot 4+2015\cdot 8+2015\cdot 16=2015\cdot 31,$$

jest więc podzielna przez 31. Po dowolnym ciągu ruchów na tablicy pozostaną żetony o sumie przypisanych liczb podzielnej przez 31. Ponieważ nie można usunąć wszystkich żetonów, a suma mniej niż pięciu liczb przypisanych dowolnym żetonom jest niepodzielna przez 31, zatem na tablicy musi pozostać co najmniej pięć żetonów.

Sposób II

Zauważmy, że jeśli w dowolnym z pól znajdują się co najmniej 2 żetony, to możemy jeszcze wykonać co najmniej jeden dozwolony ruch, przez co zmniejszymy łączną liczbę żetonów na planszy. To oznacza, że jeśli nie możemy już zmniejszyć liczby żetonów na planszy, to w każdym z pól mamy co najwyżej 1 żeton.

Rozpatrzmy ciąg ruchów, który doprowadza do sytuacji, w której na planszy jest najmniejsza możliwa do uzyskania liczba żetonów. Przypuśćmy, że na planszy pozostało mniej niż 5 żetonów, czyli istnieją pola, w których jest 0 żetonów, a także istnieją pola, w których jest 1 żeton. Wykażemy, że przy zadanych warunkach początkowych taka sytuacja nie jest możliwa — dokładniej, po dowolnej liczbie ruchów, w każdym polu albo mamy taką samą liczbę żetonów, albo istnieją dwa pola, w których liczba żetonów różni się o co najmniej 2.

Niech a, b, c, d, e oznaczają odpowiednio liczbę ruchów polegających na zabraniu dwóch żetonów odpowiednio z wierzchołka A, B, C, D, E i położeniu jednego żetonu do następnego wierzchołka. Wówczas albo $a=b=c=d=e$, co oznacza, że w każdym wierzchołku jest tyle samo żetonów, albo istnieją takie dwie kolejne liczby z ciągu (a,b,c,d,e,a), z których jedna przyjmuje wartość będącą najmniejszą liczbą w tym ciągu, a następna z tych liczb jest od niej większa — dla ustalenia uwagi niech $a<b$, przy czym a przyjmuje najmniejszą wartość w ciągu (a,b,c,d,e).

Liczba żetonów pozostałych w polu A wynosi $2015-2a+e$, a liczba żetonów pozostałych w polu B wynosi $2015-2b+a$. Na mocy przyjętych założeń mamy

$$2015-2a+e \geqslant 2015-a,$$

a także

$$2015-2b+a \leqslant 2013-a,$$

co oznacza, że w polu A znajduje się co najmniej o 2 żetony więcej niż w polu B.

To oznacza, że albo możemy wykonać jeszcze jakiś ruch, albo w każdym wierzchołku znajduje się po jednym żetonie. Druga z tych sytuacji jest więc jedynym przypadkiem, w której na planszy jest najmniejsza możliwa do uzyskania liczba żetonów, która wówczas wynosi 5.

Uwaga

Zachodzi nawet mocniejsze twierdzenie — przy zadanych warunkach początkowych, po dowolnej liczbie ruchów, na każdym polu albo mamy taką samą liczbę żetonów, albo istnieją takie dwa pola, w których liczba żetonów różni się o co najmniej 3. Zostawiamy to do udowodnienia zainteresowanym Czytelnikom.

Odpowiedź

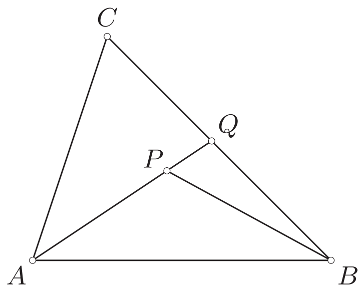
Nie można wykonać takiego ciągu ruchów, aby na planszy pozostało mniej niż pięć żetonów.

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie 13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że
$$AP+BP<AC+BC.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostej AP z bokiem BC (rys. 8). Z nierówności trójkąta uzyskujemy
$$AC+CQ>AQ \quad \text{oraz} \quad PQ+QB>PB.$$
Korzystając z tych dwóch nierówności, otrzymujemy
$$AC+BC=AC+CQ+QB>AQ+QB=AP+PQ+QB>AP+BP.$$



rys. 8

Zadanie 14. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek a, b, c dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie
$$(a^2+1)\cdot(b^2+1)=c^2+1.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n
$$\begin{aligned}(n^2+1)((n+1)^2+1) &= (n^2+1)(n^2+1+2n+1) = \\ &= (n^2+1)^2+(n^2+1)(2n+1) = \\ &= (n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2+1=(n^2+1+n)^2+1.\end{aligned}$$
Zatem trójka $(a,b,c)=(n,n+1,n^2+n+1)$ spełnia warunki zadania dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Trójek tej postaci jest nieskończenie wiele, co kończy dowód.

Sposób II

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k
$$(4k^4+1)(k^2+1)=4k^6+4k^4+k^2+1=(2k^3+k)^2+1$$
To oznacza, że trójka $(a,b,c)=(2k^2,k,2k^3+k)$ spełnia warunki zadania dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Trójek tej postaci jest nieskończenie wiele, więc rozwiązanie jest zakończone.

Zadanie 15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \qquad \text{oraz} \qquad 2x+3y+6z \geqslant 7$$

zachodzi nierówność $7xy \geqslant z$.

Rozwiązanie

Sposób I

Stosując nierówność między średnią kwadratową a średnią arytmetyczną dla 49 następujących liczb:

4 liczb równych $\frac{x}{2}$, **9** liczb równych $\frac{y}{3}$ oraz **36** liczb równych $\frac{z}{6}$,

otrzymujemy

$$\frac{1}{7} \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{49}} = \sqrt{\frac{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+9\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2+36\cdot\left(\frac{z}{6}\right)^2}{49}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{4\cdot\frac{x}{2}+9\cdot\frac{y}{3}+36\cdot\frac{z}{6}}{49} = \frac{2x+3y+6z}{49} \geqslant \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

Z powyższego wnioskujemy, że we wszystkich uzyskanych nierównościach muszą zachodzić równości, co dla nierówności między średnią kwadratową a średnią arytmetyczną oznacza, że

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}.$$

Po podstawieniu uzyskanego wyniku do otrzymanej równości

$$2x+3y+6z = 7$$

otrzymujemy $(x,y,z) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że powyższa trójka (x,y,z), spełnia założenia zadania; na mocy przeprowadzonego rozumowania jest to jedyna trójka o tej własności. Ponieważ wówczas

$$7xy = z = \frac{6}{7},$$

więc w szczególności postulowana nierówność jest prawdziwa.

Sposób II

Rozważmy ciągi

$$(x_1,x_2,x_3) = (2,3,6),$$
$$(y_1,y_2,y_3) = (x,y,z).$$

Stosując dla tych ciągów nierówność Schwarza (zob. *II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów* 2006/2007, Kraków 2009, dodatek str. 32), otrzymujemy

$$\begin{aligned}7 \leqslant 2x+3y+6z \leqslant x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \cdot \sqrt{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)} = \\ = \sqrt{2^2+3^2+6^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \\ = 7 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 7.\end{aligned}$$

Z powyższego wnioskujemy, że we wszystkich uzyskanych nierównościach muszą zachodzić równości. Wobec tego istnieje taka liczba rzeczywista t, że

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

Po podstawieniu uzyskanego wyniku do otrzymanej równości

$$2x+3y+6z = 7$$

otrzymujemy $(x,y,z) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Dalszy ciąg rozumowania jest taki sam jak w sposobie pierwszym.

Sposób III

Z nierówności $2x+3y+6z \geqslant 7$ wynika, że

$$(2x+3y+6z)^2 \geqslant 49,$$

która to nierówność, po uporządkowaniu i pomnożeniu obu stron przez liczbę -1, przybiera postać

$$-4x^2-9y^2-36z^2-12xy-24xz-36yz \leqslant -49. \tag{1}$$

Ponadto, z nierówności $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ otrzymujemy

$$49x^2+49y^2+49z^2 \leqslant 49. \tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2), uzyskujemy

$$45x^2+40y^2+13z^2-12xy-24xz-36yz \leqslant 0,$$

co jest równoważne

$$(3x-2y)^2+(6y-3z)^2+(2z-6x)^2 \leqslant 0.$$

Oznacza to, że we wszystkich powyższych nierównościach muszą zachodzić równości. Z ostatniej uzyskanej nierówności wnioskujemy zatem, że

$$\begin{cases} 3x = 2y, \\ 6y = 3z, \\ 2z = 6x. \end{cases}$$

Dalszy ciąg rozumowania jest taki sam jak we wcześniejszych sposobach.

Uwaga

Zaprezentujemy jeszcze jedno rozwiązanie w opraciu o elementy geometrii analitycznej. Nierówność

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$$

zadaje kulę o promieniu 1 w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, a nierówność

$$2x+3y+6z \geqslant 7$$

opisuje półprzestrzeń ograniczoną płaszczyzną m o równaniu

$$2x+3y+6z-7=0.$$

Odległość środka kuli, którym jest punkt $P=(0,0,0)$, od płaszczyzny m wynosi

$$d(P,m)=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0+6\cdot 0-7|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{7}{7}=1.$$

Oznacza to, że dana kula i płaszczyzna są styczne. Ponadto, punkt styczności jest położony w kierunku wektora $[2,3,6]$ od punktu $(0,0,0)$, zatem ma współrzędne $(2t,3t,6t)$, gdzie t jest pewną liczbą rzeczywistą.

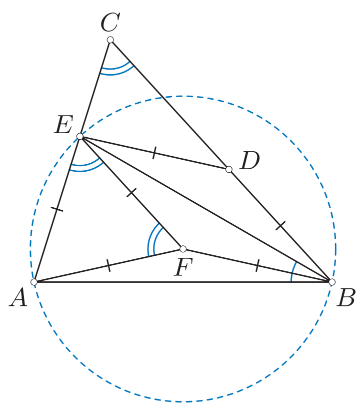
Dalszy ciąg rozumowania jest taki sam jak w sposobie drugim.

Zadanie 16. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $BD=DE=EA$. Udowodnij, że $\sphericalangle ABE=30^\circ$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech F będzie takim punktem, że czworokąt $BDEF$ jest równoległobokiem (rys. 9). Wówczas, skoro $AE=BD=EF$ oraz $\sphericalangle AEF=60^\circ$, to trójkąt AEF jest równoboczny i stąd $\sphericalangle AFE=60^\circ$. Ponieważ $AF=BF=EF$, więc punkt F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABE, wobec czego $\sphericalangle ABE=\frac{1}{2}\sphericalangle AFE=30^\circ$.



rys. 9

Sposób II

Oznaczmy przez O punkt przecięcia odcinków AD i BE (rys. 10). Zauważmy, że

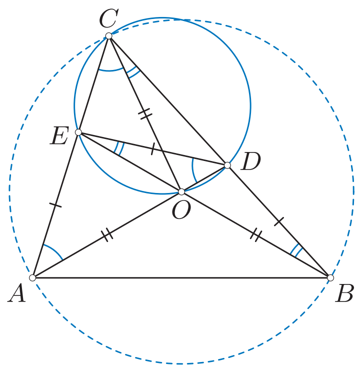
$$\sphericalangle EOD = 180^\circ - \sphericalangle DEO - \sphericalangle EDO = 180^\circ - \sphericalangle CBO - \sphericalangle CAO = 120^\circ,$$

co wynika z faktu, że suma kątów wewnętrznych w czworokącie $AOBC$ jest równa 360°. Wobec tego zachodzi równość $\sphericalangle ECD + \sphericalangle EOD = 180^\circ$, co oznacza, że na czworokącie $CDOE$ można opisać okrąg. W takim razie

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle EDO - \sphericalangle CAO \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCO = \sphericalangle DEO = \sphericalangle CBO,$$

więc trójkąty ACO oraz BCO są równoramienne i $AO = CO = BO$. Punkt O jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, skąd wniosek, że

$$\sphericalangle ABE = \frac{180^\circ - \sphericalangle AOB}{2} = 30^\circ.$$



rys. 10

Czwarte zawody indywidualne

Zadanie 17. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f spełniają równanie

$$2ab+6bc+12cd+20de+30ef+6fa=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+25e^2+36f^2.$$

Udowodnij, że $af=bc$.

Rozwiązanie

Mnożąc obie strony danego równania przez 2 i przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę, otrzymujemy

$$2a^2+8b^2+18c^2+32d^2+50e^2+72f^2-4ab-12bc-24cd-40de-60ef-12af=0.$$

Lewą stronę uzyskanego równania możemy przepisać jako

$$a^2-4ab+4b^2+4b^2-12bc+9c^2+9c^2-24cd+16d^2+$$
$$+16d^2-40de+25e^2+25e^2-60ef+36f^2+36f^2-12af+a^2=$$
$$=(a-2b)^2+(2b-3c)^2+(3c-4d)^2+(4d-5e)^2+(5e-6f)^2+(6f-a)^2,$$

co jest równe 0 tylko wtedy, gdy liczby w sześciu nawiasach są zerami, czyli

$$a=2b=3c=4d=5e=6f.$$

Mnożąc stronami równości $a=2b$ oraz $6f=3c$ otrzymujemy $6af=6bc$, a to po obustronnym podzieleniu przez 6 daje równość podaną w tezie zadania.

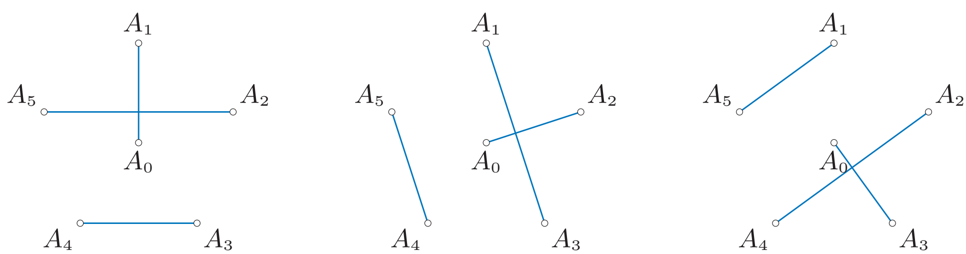
Zadanie 18. W turnieju szachowym startuje $2n$ zawodników, gdzie $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną. Udowodnij, że można tak zaplanować rozgrywki składające się z $2n-1$ rund, aby każdy szachista rozegrał z każdym innym dokładnie jedną partię szachów.

Uwaga: W każdej rundzie każdy z zawodników rozgrywa dokładnie jedną partię szachów.

Rozwiązanie

Rozważmy $(2n-1)$-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{2n-1}$ o środku okręgu opisanego A_0 i przypiszmy zawodnikom punkty A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n-1}.

Dla dodatniej liczby całkowitej $k \leqslant 2n-1$ zdefiniujemy pary zawodników spotykających się przy szachownicy w k-tej rundzie. Narysujmy odcinek A_0A_k oraz wszystkie przekątne wielokąta foremnego prostopadłe do prostej A_0A_k. Przyjmiemy, że narysowane odcinki wyznaczają pary zawodników grających ze sobą w k-tej rundzie (na rysunku 11 zilustrowano pierwsze trzy rundy dla $n=3$).



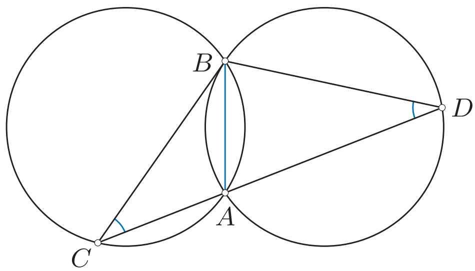
rys. 11

Ponieważ w każdej rundzie zaplanowaliśmy n partii, a przy tym żadna para zawodników nie powtarza się w dwóch rundach, każdy zawodnik zagra z każdym innym.

Zadanie 19. Dwa przystające okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi w takich punktach C i D różnych od A, że punkt A należy do odcinka CD. Wykaż, że $BC=BD$.

Rozwiązanie

Ponieważ kąty wpisane w przystające okręgi oparte na przystających cięciwach mają równe miary, więc $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB$ (rys. 12). Stąd wniosek, że trójkąt BCD jest równoramienny i $BC=BD$.



rys. 12

Zadanie 20. Udowodnij, że istnieje 2015 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, które nie są postaci a^2b^3, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli liczba a^2b^3 jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez p. W konsekwencji liczba a^2b^3 jest podzielna przez p^2.

Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy istnienie takich 2015 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że każda z nich jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą, ale nie przez kwadrat tej liczby pierwszej.

Niech p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą. Rozważmy następujący układ 2015 kongruencji:

$$\begin{cases} n\equiv p_1 \pmod{p_1^2}, \\ n+1\equiv p_2 \pmod{p_2^2}, \\ n+2\equiv p_3 \pmod{p_3^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n+2013\equiv p_{2014} \pmod{p_{2014}^2}, \\ n+2014\equiv p_{2015} \pmod{p_{2015}^2}, \end{cases} \qquad (1)$$

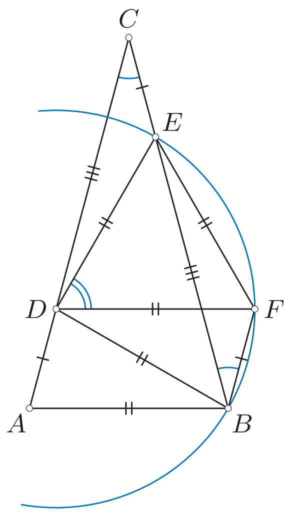
Z chińskiego twierdzenia o resztach wnioskujemy, że istnieje dodatnia liczba całkowita n spełniająca układ kongruencji (1). W konsekwencji kolejne liczby od n do $n+2014$ spełniają warunki zadania.

Zadanie 21. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB=BD=DE$ oraz $AD=CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Rozwiązanie

Niech F będzie takim punktem, że czworokąt $ABFD$ jest równoległobokiem (rys. 13). Wówczas $BF=AD=CE$, $BE=BC-CE=AC-AD=CD$ oraz $\sphericalangle EBF=\sphericalangle DCE$, skąd wniosek, że trójkąty BEF i CDE są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $EF=DE=DF$, więc trójkąt DEF jest równoboczny. Ponieważ $DB=DE=DF$, więc trójkąt BEF jest wpisany w okrąg o środku w punkcie D. To oznacza, że

$$\sphericalangle ACB=\sphericalangle EBF=\frac{\sphericalangle EDF}{2}=30^\circ.$$



rys. 13

Uwaga

Podobne rozumowanie można przeprowadzić również uzupełniając trójkąt BED do równoległoboku $BEDP$. Wówczas trójkąt ABP okazuje się być równoboczny i stąd $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADP=\frac{1}{2}\sphericalangle ABP=30^\circ$. Uzupełnienie rozwiązania pozostawiamy Czytelnikowi.

Mecz matematyczny

Zadanie 22. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2^2x_3^3 + x_2x_3^2x_4^3 + x_3x_4^2x_5^3 + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-2}x_{n-1}^2x_n^3 + x_{n-1}x_n^2x_1^3 + x_nx_1^2x_2^3 \leqslant x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + \ldots + x_n^6.$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla sześciu liczb x_1^6, x_2^6, x_2^6, x_3^6, x_3^6, x_3^6, otrzymujemy

$$\sqrt[6]{x_1^6x_2^{12}x_3^{18}} \leqslant \frac{x_1^6 + 2x_2^6 + 3x_3^6}{6},$$

czyli

$$x_1x_2^2x_3^3 \leqslant \frac{x_1^6 + 2x_2^6 + 3x_3^6}{6}. \qquad (1)$$

Analogicznie uzyskujemy nierówności

$$x_kx_{k+1}^2x_{k+2}^3 \leqslant \frac{x_k^6 + 2x_{k+1}^6 + 3x_{k+2}^6}{6} \qquad (2)$$

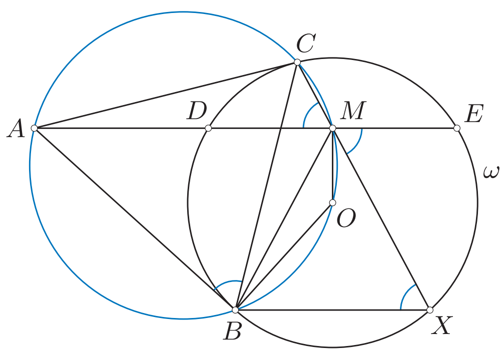
dla $k = 2, 3, 4, \ldots, n$, gdzie przyjęliśmy oznaczenia $x_{n+1} = x_1$ oraz $x_{n+2} = x_2$.

Dodając stronami nierówność (1) oraz $n-1$ nierówności (2), otrzymujemy tezę zadania.

Zadanie 23. Przez punkt A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach B i C. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω w różnych punktach D i E. Prosta równoległa do DE przechodząca przez punkt B przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie X. Udowodnij, że prosta XC przechodzi przez środek odcinka DE.

Rozwiązanie

Sposób I



rys. 14

Oznaczmy przez O środek okręgu ω, a przez M — środek odcinka DE (rys. 14). Ponieważ

$$\sphericalangle AMO = \sphericalangle ABO = \sphericalangle ACO,$$

więc punkty B, M, C leżą na okręgu o średnicy AO. Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle CMD = \sphericalangle CBA = \sphericalangle BXM = \sphericalangle XME.$$

Ostatni związek oznacza, że punkty C, M, X leżą na jednej prostej.

Sposób II

Niech M będzie punktem przecięcia prostych XC i DE (rys. 15)

Trójkąty ADB i ABE są podobne, bo mają wspólny kąt przy wierzchołku A oraz $\sphericalangle BEA = \sphericalangle DBA$. Zatem

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EB}.$$

Analogicznie

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EC}.$$

Ponieważ $AB = AC$, więc na mocy powyższych dwóch równości uzyskujemy

$$\frac{BD}{EB} = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EC}.$$

Stąd

$$BD \cdot EC = CD \cdot EB.$$

Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, otrzymujemy równość

$$BD \cdot EC + CD \cdot EB = BC \cdot DE,$$

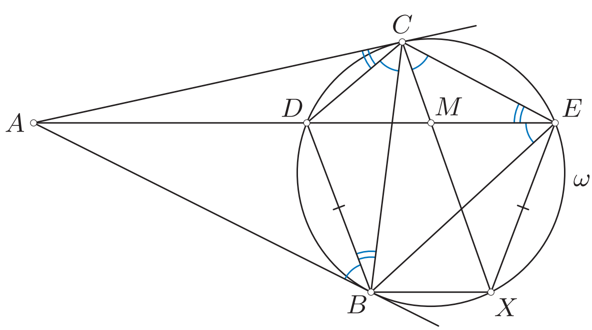
skąd $BC \cdot DE = 2BD \cdot EC$. Zatem

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{\frac{1}{2}DE}. \tag{1}$$

Ponieważ trapez $BXED$ jest wpisany w okrąg, więc jest to trapez równoramienny. Zatem $XE = BD$, czyli

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ECX = \sphericalangle ECM.$$

Ponadto $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CED = \sphericalangle CEM$, gdyż kąty CBD i CEM są wpisane w okrąg ω i oparte na tym samym łuku.



rys. 15

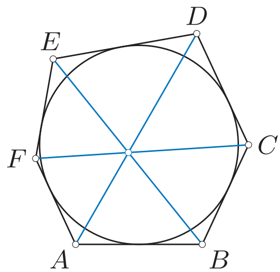
Z dwóch powyższych równości kątów wnosimy, że trójkąty EMC i BDC są podobne. Zatem

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{EM}.$$

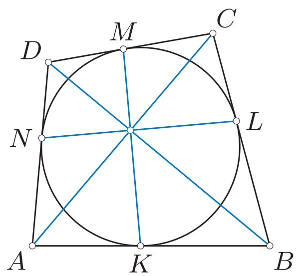
W połączeniu z równością (1) otrzymujemy więc $EM = \frac{1}{2}DE$, co było do udowodnienia.

Sposób III

Skorzystamy z *twierdzenia Brianchona*: jeżeli sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (rys. 16).

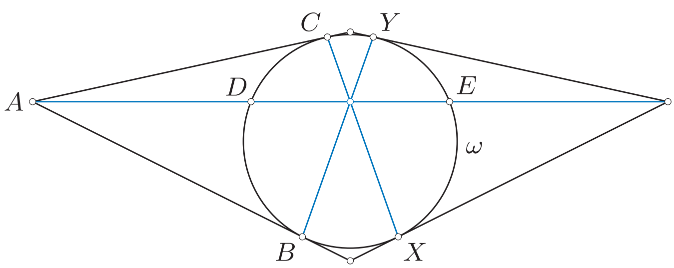


rys. 16



rys. 17

Szczególnym przypadkiem powyższego twierdzenia (dla zdegenerowanego sześciokąta $ABCDEF$) jest następujące twierdzenie: dla dowolnego czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu, który jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, proste AC, BD, KM, LN przecinają się w jednym punkcie (rys. 17).



rys. 18

Przystępujemy do rozwiązania zadania. Ponieważ $DEXB$ jest trapezem równoramiennym, więc punkt X jest symetryczny do B względem symetralnej odcinka DE. Jeżeli zatem odbijemy proste AB i AC względem symetralnej DE, to otrzymamy proste styczne do okręgu ω odpowiednio w punkcie X i w pewnym punkcie Y (rys. 18). Stosując powyższe twierdzenie dla czworokąta wyznaczonego przez proste styczne do ω w punktach B, X, Y, C, uzyskujemy, że proste CX, BY oraz DE przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ jednak proste CX i BY są symetryczne względem symetralnej DE, więc punkt przecięcia tych trzech prostych musi być środkiem odcinka DE, czego należało dowieść.

Zadanie 24. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k istnieje taka liczba pierwsza $p>k$, że k liczb całkowitych bezpośrednio poprzedzających liczbę p, a także k liczb całkowitych bezpośrednio po niej następujących, to liczby złożone.

W rozwiązaniu możesz skorzystać bez dowodu z następującego twierdzenia Dirichleta: *Dla dowolnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a i b istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $a+bn$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.*

Rozwiązanie

Rozważmy następujący układ kongruencji:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{(k+1)!}, \\ a \equiv 2 \pmod{q}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie q jest dowolną liczbą pierwszą większą od $k+1$.

Z chińskiego twierdzenia o resztach wnioskujemy, że istnieje dodatnia liczba całkowita $a>q+2$ spełniająca układ kongruencji (1). Liczba ta jest względnie pierwsza z liczbą $b=(k+1)!\cdot q$. Na mocy twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych, zacytowanego w treści zadania, istnieje taka dodatnia liczba całkowita, że liczba $p=a+bn>q+2$ jest pierwsza. Wówczas p spełnia układ kongruencji

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{(k+1)!}, \\ p \equiv 2 \pmod{q}, \end{cases}$$

jest więc postaci $p=(k+1)!\cdot s+1$.

Ponieważ dla $i=2,3,4,\ldots,k+1$ liczby $(k+1)!\cdot s\pm i$ są podzielne przez i, więc liczby

$$p-k-2,\ p-k-1,\ p-k,\ \ldots,\ p-4,\ p-3$$

oraz

$$p+1,\ p+2,\ p+3,\ \ldots,\ p+k-1,\ p+k$$

są złożone. Ponadto liczba $p-1$ jest podzielna przez $(k+1)!$, a liczba $p-2$ jest podzielna przez q i większa od q.

Udowodniliśmy więc, że liczba pierwsza p ma z każdej strony co najmniej k liczb złożonych.

Zadanie 25. Udowodnij, że równanie $m^2+n^2=6^k$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dane równanie nie ma rozwiązań spełniających warunki zadania.

Przeprowadzając dowód nie wprost załóżmy, że rozwiązania równania istnieją i niech trójka liczb (m, n, k) będzie rozwiązaniem, w którym liczba k jest możliwie najmniejsza.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba 6 nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, skąd wynika, że $k>1$, a w konsekwencji liczba m^2+n^2 jest podzielna przez 36. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 3 tylko resztę 0 lub 1, liczby m i n są podzielne przez 3. Podobnie, kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 4 tylko resztę 0 lub 1, a więc liczby m i n są parzyste. Zatem liczby m i n są podzielne przez 6, skąd $m^2+n^2 \geqslant 72$ i w konsekwencji $k>2$.

Zauważmy, że

$$\left(\frac{m}{6}\right)^2+\left(\frac{n}{6}\right)^2=6^{k-2},$$

skąd wynika, że trójka liczb $(m/6,\, n/6,\, k-2)$ jest rozwiązaniem danego równania wbrew założeniu o minimalności rozwiązania $(m,\, n,\, k)$.

Zadanie 26. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=120^\circ$. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że $\sphericalangle DFE=90^\circ$.

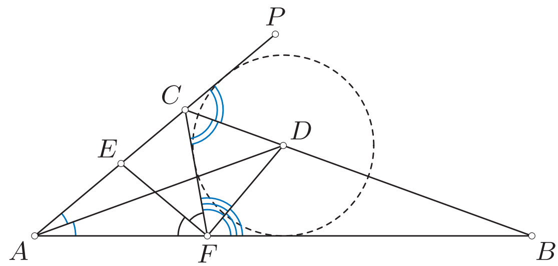
Rozwiązanie

Sposób I

Niech P będzie dowolnym punktem prostej AC, leżącym po przeciwnej stronie punktu C niż punkt A (rys. 19). Ponieważ

$$\sphericalangle BCP=180^\circ-\sphericalangle ACB=60^\circ=\sphericalangle FCB,$$

więc półprosta CB jest dwusieczną kąta FCP. Ponadto półprosta AD jest dwusieczną kąta CAB. Stąd wniosek, że punkt D jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ACF oraz półprosta FD jest dwusieczną kąta BFC.



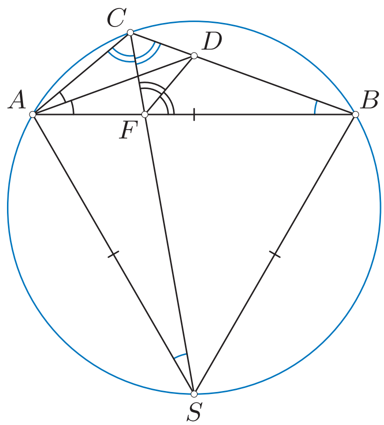
rys. 19

Analogicznie uzasadniamy, że półprosta FE jest dwusieczną kąta AFC. Łącząc poczynione obserwacje, otrzymujemy

$$\sphericalangle DFE=\sphericalangle DFC+\sphericalangle EFC=\frac{\sphericalangle BFC+\sphericalangle AFC}{2}=90^\circ.$$

Sposób II

Oznaczmy przez S taki punkt znajdujący się po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C, że trójkąt ABS jest równoboczny (rys. 20). Zauważmy, że skoro $\sphericalangle ASB+\sphericalangle ACB=180^\circ$, to na czworokącie $ASBC$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle ACS=\sphericalangle ABS=60^\circ=\sphericalangle ACF$, więc punkt F leży na odcinku CS.



rys. 20

Ponieważ $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle FBC$ oraz $\sphericalangle ACS = \sphericalangle FCB$, więc trójkąty ACS i FCB są podobne (cecha kąt–kąt). Stąd wniosek, że

$$\frac{FC}{FB} = \frac{AC}{AS} = \frac{AC}{AB}.$$

Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC, więc z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}.$$

Łącząc uzyskane związki, otrzymujemy zależność

$$\frac{FC}{FB} = \frac{DC}{DB}.$$

Skoro punkt D należy do wnętrza odcinka BC, to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej wynika, że półprosta FD jest dwusieczną kąta BFC. Końcowa część rozwiązania przebiega jak w poprzednim sposobie.

Zadanie 27. Udowodnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $r < p$ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b mniejsze od $\sqrt{p}$, że $ar \equiv \pm b \pmod{p}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy dla uproszczenia oznaczenie $n = [\sqrt{p}]$. Niech dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba r_i będzie resztą z dzielenia ir przez p. Dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ niech Z_k będzie zbiorem $n+1$ kolejnych liczb całkowitych od $(n+1)k$ do $(n+1)k+n$.

Jeżeli do pewnego zbioru Z_k należą dwie reszty r_i, r_j, gdzie $0 < i < j \leqslant n$, to $|r_j - r_i| \leqslant n$. Przyjmując $a = j - i$ oraz $b = |r_j - r_i|$, otrzymujemy

$$ar = (j-i)r = jr - ir \equiv r_j - r_i = \pm b \pmod{p},$$

co należało wykazać.

Przypuśćmy teraz, że do żadnego ze zbiorów Z_k nie należą dwie reszty. Skoro reszt jest więcej niż zbiorów, to pewna reszta r_i nie należy do żadnego ze zbiorów Z_k. Ponieważ zbiory Z_k zawierają wszystkie liczby całkowite od $n+1$ do $(n+1)\cdot(n-1)+n$, zachodzi wówczas jedna z dwóch nierówności

$$r_i < n+1 \tag{1}$$

lub

$$r_i > (n+1)\cdot(n-1)+n = n^2+n-1. \tag{2}$$

W przypadku, gdy zachodzi nierówność (1), czyli $r_i \leqslant n$, możemy przyjąć $a=i$ oraz $b=r_i$. Wówczas

$$ar \equiv b \pmod{p}.$$

Natomiast w przypadku, gdy zachodzi (2), czyli $n^2+n \leqslant r_i < p$, przyjmujemy $a=i$ oraz $b=p-r_i$. Wówczas spełniona jest kongruencja

$$ar \equiv -b \pmod{p},$$

a przy tym

$$b \leqslant p-n^2-n \leqslant ((n+1)^2-1)-n^2-n = n^2+2n+1-1-n^2-n = n.$$

Zadanie 28. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n \geqslant 4$, umieszczono lampę i przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) trzech lamp leżących w bezpośrednim sąsiedztwie tej lampy: dwóch w kierunku zegarowym i jednej w kierunku przeciwzegarowym. Początkowo jedna lampa jest zapalona, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że lampy wraz z przełącznikami są ponumerowane kolejnymi liczbami zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przy czym numerację kontynuujemy cyklicznie modulo n (np. lampę 1 będziemy nazywać też lampą $n+1$, a lampę n lampą 0). Zgodnie z tą konwencją przełącznik przy lampie k przełącza lampy $k-1$, $k+1$ i $k+2$.

Zauważmy, że przełączenie przełączników przy lampach $k+1$, $k+3$, $k+4$ i $k+5$ powoduje przełączenie lamp k i $k+7$ bez zmiany stanu pozostałych lamp. Analogiczną sekwencją operacji możemy przełączyć lampy $k+7$ i $k+14$, a w konsekwencji możliwe jest przełączenie lamp k i $k+14$, lub ogólniej, lamp k i $k+7i$ dla dowolnej liczby całkowitej i.

W dalszej części rozwiązania rozważymy dwa przypadki.

1° W przypadku, gdy liczba n nie jest podzielna przez 7, istnieje taka liczba całkowita i, że $7i \equiv 1 \pmod{n}$. Oznacza to, że istnieje ciąg operacji przełączający lampy k oraz $k+7i \equiv k+1 \pmod{n}$. Jeśli początkowo zapalona była lampa k, a pozostałe zgaszone, to ciągiem operacji analogicznym do wyżej opisanego zapalamy lampy $k+2$ i $k+3$, a następnie przełącznikiem przy lampie $k+1$ gasimy wszystkie trzy zapalone lampy. Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku zgaszenie jednej lampy jest możliwe.

2° Rozważmy teraz przypadek, gdy liczba n jest podzielna przez 7. Wykażemy dwoma sposobami, że wyłączenie pojedynczej lampy nie jest możliwe.

Sposób I

Łącząc sekwencje operacji przełączających pary lamp

$$(0,7),\quad (7,14),\quad (14,21),\quad \ldots,\quad (n-14,n-7)\quad \text{oraz}\quad (n-7,n)$$

otrzymamy nietrywialną sekwencję operacji, która w rezultacie jej wykonania nie zmienia stanu żadnej lampy.

Zauważmy, że możliwych stanów lamp jest 2^n. Także liczba istotnie różnych sekwencji przełączeń jest równa 2^n, gdyż możemy rozpatrywać tylko sekwencje, w których każdy przełącznik został użyty co najwyżej raz, a kolejność używania przełączników jest bez znaczenia. Skoro istnieje nietrywialna sekwencja operacji, która daje taki sam efekt jak sekwencja pusta, to liczba stanów lamp, do jakich możemy dojść od stanu, w którym wszstkie lampy są zgaszone, jest mniejsza od 2^n. Stąd wynika, że startując od zgaszonych wszystkich lamp nie każdy stan daje się uzyskać.

Gdyby możliwe było przełączenie tylko jednej lampy, moglibyśmy przejść od dowolnego stanu lamp do dowolnego innego. To dowodzi, że w przypadku, gdy liczba lamp jest podzielna przez 7, zgaszenie pojedynczej lampy nie jest możliwe.

Sposób II

Załóżmy, że początkowo zapalona jest lampa numer 1, a pozostałe są zgaszone. Niech Z będzie zbiorem lamp o numerach dających przy dzieleniu przez 7 resztę 1, 2, 3 lub 5. Wówczas nietrudno sprawdzić, że dowolny przełącznik przełącza parzyście wiele lamp ze zbioru Z. Skoro startujemy od stanu, w którym zapalona jest dokładnie jedna lampa należąca do zbioru Z, to niezależnie od manipulacji wykonanych dostępnymi przełącznikami, liczba zapalonych lamp za zbioru Z pozostaje nieparzysta. W szczególności nigdy nie dojdziemy do stanu, w którym wszytskie lampy są zgaszone.

Odpowiedź

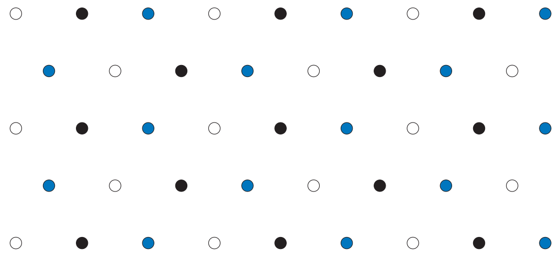
Zgaszenie pojedynczej lampy jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n nie jest podzielna przez 7.

Zadanie 29. Rozstrzygnij, czy punkty płaszczyzny można pokolorować czterema kolorami w taki sposób, aby spełnione były następujące dwa warunki:

- każde koło o średnicy większej od 2 zawiera we wnętrzu punkty wszystkich czterech kolorów;
- każde koło o średnicy mniejszej od 1 zawiera we wnętrzu punkty co najwyżej dwóch kolorów.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takie pokolorowanie jest możliwe. Narysujmy na płaszczyźnie siatkę trójkątów równobocznych o boku 1 i pomalujmy węzły siatki trzema kolorami tak, aby każdy z tych trójkątów miał wierzchołki różnych kolorów (rys. 21). Pozostałą część płaszczyzny pomalujmy czwartym kolorem.



rys. 21

Każde koło o średnicy większej od 2 zawiera w całości pewien trójkąt równoboczny o boku 1 należący do narysowanej siatki — jest to trójkąt, do którego wnętrza lub brzegu należy środek koła. Tym samym każde takie koło zawiera punkty wszystkich czterech kolorów.

Z kolei koło o średnicy mniejszej od 1 nie może zawierać punktów w więcej niż dwóch kolorach, gdyż odległość między dowolnymi punktami innego koloru niż kolor tła jest równa co najmniej 1.

Zadanie 30. Ciągi (a_n) i (b_n) są określone następującymi wzorami:

$$a_0 = 99\,999, \qquad a_1 = 1\,699\,999, \qquad b_0 = 1, \qquad b_1 = 5,$$

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - 9a_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+2} = 10b_{n+1} - 8b_n \quad \text{dla } n = 0,1,2,3,\ldots$$

Wykaż, że $a_{2015} < b_{2015}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy

$$A_n = 200\,000 \cdot 9^n - 100\,001 \qquad \text{oraz} \qquad B_n = \frac{1}{2}\Big((5+\sqrt{17})^n + (5-\sqrt{17})^n\Big).$$

Przez bezpośrednie obliczenia sprawdzamy, że wówczas

$$A_0 = 99\,999, \qquad A_1 = 1\,699\,999, \qquad B_0 = 1, \qquad B_1 = 5.$$

Ponadto dla $n = 0,1,2,3,\ldots$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 10A_{n+1} - 9A_n &= 10\cdot 200\,000\cdot 9^{n+1} - 10\cdot 100\,001 - 9\cdot 200\,000\cdot 9^n + 9\cdot 100\,001 = \\ &= 10\cdot 200\,000\cdot 9^{n+1} - 200\,000\cdot 9^{n+1} - 10\cdot 100\,001 + 9\cdot 100\,001 = \\ &= 9\cdot 200\,000\cdot 9^{n+1} - 100\,001 = 200\,000\cdot 9^{n+2} - 100\,001 = A_{n+2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &10B_{n+1} - 8B_n = \\ &= \frac{1}{2}\Big(10\cdot(5+\sqrt{17})^{n+1} + 10\cdot(5-\sqrt{17})^{n+1} - 8\cdot(5+\sqrt{17})^n - 8\cdot(5-\sqrt{17})^n\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big((10\cdot(5+\sqrt{17}) - 8)\cdot(5+\sqrt{17})^n + (10\cdot(5-\sqrt{17}) - 8)\cdot(5-\sqrt{17})^n\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big((42+10\sqrt{17})\cdot(5+\sqrt{17})^n + (42-10\sqrt{17})\cdot(5-\sqrt{17})^n\Big) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\Big((5+\sqrt{17})^2\cdot(5+\sqrt{17})^n+(5-\sqrt{17})^2\cdot(5-\sqrt{17})^n\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((5+\sqrt{17})^{n+2}+(5-\sqrt{17})^{n+2}\Big) = B_{n+2}\,,$$

skąd wynika, że $a_n = A_n$ oraz $b_n = B_n$ dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych n.

Zadanie sprowadza się więc do porównania liczb

$$a_{2015} = 200\,000\cdot 9^{2015} - 100\,001 \quad \text{oraz} \quad b_{2015} = \frac{1}{2}\Big((5+\sqrt{17})^{2015}+(5-\sqrt{17})^{2015}\Big).$$

Wykażemy, że $a_{2015} < b_{2015}$. Istotnie:

$$200\,000\cdot 9^{2015} - 100\,001 < 200\,000\cdot 9^{2015} < \frac{1}{2}(5+\sqrt{17})^{2015} <$$
$$< \frac{1}{2}\Big((5+\sqrt{17})^{2015}+(5-\sqrt{17})^{2015}\Big).$$

Dla uzasadnienia drugiej z powyższych nierówności wystarczy udowodnić, że

$$\left(\frac{5+\sqrt{17}}{9}\right)^{2015} > 400\,000.$$

Zauważmy jednak, że

$$\sqrt{17}-4 = \frac{1}{\sqrt{17}+4} > \frac{1}{5+4} = \frac{1}{9} > \frac{1}{10},$$

skąd $5+\sqrt{17} > 9{,}1 > 9{,}09$. Wykorzystując powyższe oszacowanie i korzystając z nierówności Bernoulliego

$$(1+a)^n > 1+an,$$

otrzymujemy

$$\left(\frac{5+\sqrt{17}}{9}\right)^{2015} > \left(\frac{9{,}09}{9}\right)^{2015} = 1{,}01^{2015} > 1{,}01^{2000} = (1{,}01^{100})^{20} > 2^{20} =$$
$$= (2^{10})^2 = 1024^2 > 1000^2 = 1\,000\,000 > 400\,000\,.$$

Uwaga

Nierówność Bernoulliego dla $a > 0$ i $n > 1$ wynika bezpośrednio z rozwinięcia dwumianowego:

$$(1+a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \ldots = 1+na+\ldots > 1+an\,.$$

Inny dowód można przeprowadzić w oparciu o nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną zastosowaną do $n-1$ liczb równych 1 i liczby $1+an$. Wówczas otrzymujemy

$$\sqrt[n]{1+an} < \frac{(n-1)\cdot 1 + (1+an)}{n}\,,$$

co po redukcji wyrazów podobnych i obustronnym podniesieniu do n-tej potęgi daje

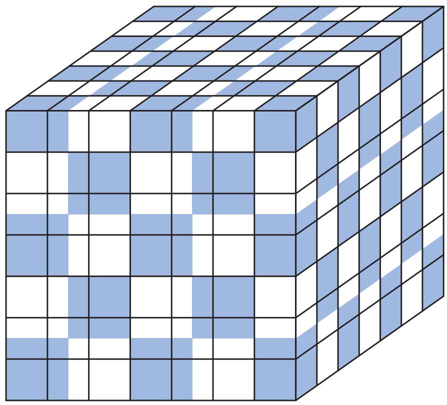
$$1+an < (1+a)^n.$$

Zadanie 31. Udowodnij, że sześcianu o krawędzi 61 nie można wypełnić klockami, z których każdy jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach $3 \times 3 \times 1$.

Rozwiązanie

Sposób I

Pokolorujmy sześcian w dwukolorową szachownicę o polach będących prostopadłościanami o wymiarach $1 \times 1,5 \times 1,5$ i krawędziach równoległych do krawędzi sześcianu, zaczynając kolorowanie od jednego z wierzchołków sześcianu (rys. 22, kolorowanie rozpoczęliśmy od lewego dolnego rogu). Wówczas każdy klocek pokrywa taką samą objętość obydwu kolorów. Tymczasem objętość zajmowana przez kolor, od którego zaczęliśmy kolorowanie w rogu sześcianu, jest o 1 większa od objętości wypełnionej drugim kolorem.



rys. 22

Sposób II *(inna wersja sposobu* I*)*

Podzielmy sześcian na sześciany jednostkowe, zwane dalej komórkami, i w co drugiej warstwie (zaczynając od górnej warstwy) wpiszmy w komórki liczby jak na rysunku 23, a w pozostałych warstwach wpiszmy liczby przeciwne. Wówczas każdy klocek pokrywa komórki o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie komórki dużego sześcianu jest równa 1.

1	–1	0	1	–1	0	1
–1	1	0	–1	1	0	–1
0	0	0	0	0	0	0
1	–1	0	1	–1	0	1
–1	1	0	–1	1	0	–1
0	0	0	0	0	0	0
1	–1	0	1	–1	0	1

rys. 23

Sposób III

Podzielmy sześcian na sześciany jednostkowe, zwane dalej komórkami, i w co drugiej warstwie (zaczynając od górnej warstwy) wpiszmy w komórki liczby 1, a w pozostałych -1. Wówczas każdy klocek $2\times2\times2$ pokrywa komórki o sumie liczb równej 0, a klocek $3\times3\times1$ pokrywa komórki o sumie liczb równej ±9 lub ±3, a więc podzielnej przez 3. Tymczasem suma liczb wpisanych we wszystkie komórki dużego sześcianu jest równa 61^2, a więc nie jest podzielna przez 3.

Sposób IV

Podzielmy sześcian na sześciany jednostkowe, zwane dalej komórkami, i wypełnijmy komórki jak na rysunku 22, gdzie przedstawiony jest widok z góry, a komórki każdej pionowej kolumny $1\times1\times61$ są wypełnione tą samą liczbą. Wówczas każdy klocek $3\times3\times1$ pokrywa komórki o sumie liczb równej 0, a klocek $2\times2\times2$ pokrywa komórki o sumie parzystej. Tymczasem suma liczb wpisanych we wszystkie komórki dużego sześcianu jest równa 61, jest więc niearzysta.

Uwaga

Faktycznie w każdym z czterech zaprezentowanych rozwiązań udowodniliśmy nieco więcej, niż było to wymagane w treści zadania, a mianowicie, że sześcianu o krawędzi 61 nie da się wypełnić klockami $2\times1\times1$ ustawionymi pionowo i klockami $3\times1\times1$ ułożonymi w dwóch kierunkach poziomych.

Zadanie 32. Pewne n wierzchołków $3n$-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Wierzchołki wielokąta należy pogrupować w n rozłącznych trójek takich, że każda zawiera dokładnie jeden czerwony wierzchołek. Udowodnij, że można to uczynić tak, aby każde dwa trójkąty wyznaczone przez różne trójki miały punkt wspólny.

Rozwiązanie

Sposób I (rozwiązanie kadry)

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Jeżeli czworokąt $XYZT$ jest wypukły, to $XY+ZT<XZ+YT$.

Dowód

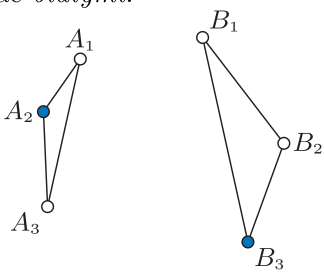
Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych czworokąta $XYZT$. Zapisując nierówność trójkąta dla trójkątów XYP oraz ZTP, uzyskujemy

$$XY<XP+YP \quad \text{oraz} \quad ZT<ZP+TP,$$

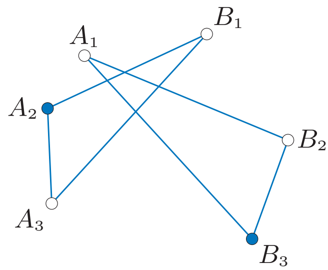
które to związki po dodaniu stronami dają postulowaną nierówność.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Spośród wszystkich możliwych grupowań wierzchołków na n rozłącznych trójek wybierzmy to, w którym suma obwodów otrzymanych trójkątów jest największa. Udowodnimy, że wówczas każde dwa trójkąty wyznaczone przez różne trójki mają punkt wspólny.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieją dwa trójkąty wyznaczane przez pewne z wybranych trójek, które nie mają punktów wspólnych i oznaczmy je przez $A_1A_2A_3$ oraz $B_1B_2B_3$ w taki sposób, aby sześciokąt $A_1A_2A_3B_3B_2B_1$ był wypukły (rys. 24). Wierzchołki danego $3n$-kąta, które nie są czerwone będziemy nazywać *białymi.*



rys. 24



rys. 25

Zauważmy, że w co najmniej jednej z par (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) są dwa punkty białe. Przypuśćmy, że jest to para (A_1,B_1). Każdy z czworokątów $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_3B_3B_1$ jest wypukły, więc z udowodnionego na początku lematu wynika, że

$$A_1A_2+B_1B_2<A_1B_2+B_1A_2 \quad \text{oraz} \quad A_1A_3+B_1B_3<A_1B_3+B_1A_3.$$

Dodając stronami te dwie nierówności, a następnie do obu stron dodając wielkość $A_2A_3+B_2B_3$, stwierdzamy, że suma obwodów trójkątów $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ jest mniejsza od sumy obwodów trójkątów $A_1B_2B_3$ i $B_1A_2A_3$. To oznacza, że zamieniając pierwszą z tych par trójkątów na drugą (rys. 25), otrzymamy układ n trójek, w którym suma obwodów jest większa niż w rozważanym układzie. Stoi to w sprzeczności z założeniem, że rozważany układ realizuje największą możliwą sumę obwodów.

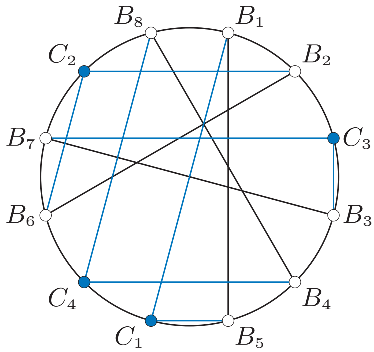
Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w przypadkach, gdy (A_2,B_2) lub (A_3,B_3) to pary białych wierzchołków. Uzyskane sprzeczności z założeniem nie wprost oznaczają, że pogrupowanie wierzchołków $3n$-kąta w trójki wyznaczające trójkąty o największej możliwej sumie obwodów spełnia warunki zadania.

Sposób II (rozwiązanie uczestników Obozu)

Wierzchołki, które nie zostały pomalowane na czerwono będziemy nazywać *białymi.* Oznaczmy białe wierzchołki przez B_i, $i=1, 2, \ldots, 2n$ w taki sposób, aby wielokąt $B_1B_2\ldots B_{2n}$ był wypukły (rys. 26). Czerwone wierzchołki oznaczmy przez C_i, $i=1, 2, \ldots, n$ w dowolnej kolejności.

Udowodnimy, że grupowanie wierzchołków danego $3n$-kąta w trójkąty $B_iB_{i+n}C_i$, gdzie $i=1, 2, \ldots, n$, spełnia warunki zadania. W tym celu zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych i, j takich, że $1\leqslant i<j\leqslant n$ odcinki B_iB_{i+n} oraz B_jB_{j+n} się przecinają, gdyż są to cięciwy okręgu opisanego na danym $3n$-kącie, a punkty B_j, B_{j+n} leżą na różnych łukach tego okręgu ograniczonych punktami B_i, B_{i+n}. To oznacza, że również trójkąty $B_iB_{i+n}C_i$ oraz $B_jB_{j+n}C_j$

mają punkt wspólny.



rys. 26

Uwaga

Warto zauważyć, że pierwszy sposób rozwiązania wskazuje (niekonstruktywnie, poprzez opisanie pewnej własności) na jedno grupowanie punktów w trójki. Tymczasem drugi sposób rozwiązania pozwala łatwo skonstruować $n!$ różnych grupowań.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści