XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 22 października 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Czy wewnątrz kwadratu o boku długości 20 istnieje punkt, którego odległości od boków tego kwadratu są czterema kolejnymi liczbami całkowitymi?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki punkt nie istnieje.

Sposób I

Zauważmy, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz kwadratu od pary jego przeciwległych boków jest równa 20. Wobec tego suma wszystkich czterech odległości od boków kwadratu jest równa 40, niezależnie od położenia punktu wewnątrz kwadratu.

Jeżeli odległości pewnego punktu od boków kwadratu są równe n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, to ich suma jest równa $4n+6$. Jednak równość $4n+6=40$ prowadzi do wniosku, że $4n=34$, czyli $n=8,5$, a ta liczba nie jest całkowita. To oznacza, że nie istnieje punkt spełniający warunki zadania.

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym sposobie zauważamy, że suma odległości każdego punktu wewnątrz kwadratu od boków tego kwadratu jest równa 40.

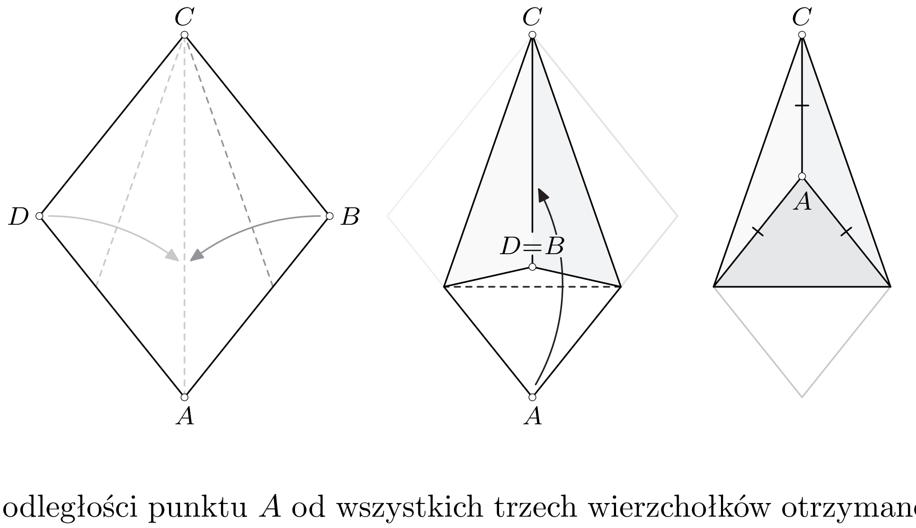
Suma czterech kolejnych liczb całkowitych jest tym większa, im większa jest najmniejsza z nich. Ponadto

$$8+9+10+11=38<40<42=9+10+11+12.$$

To oznacza, że suma czterech kolejnych liczb całkowitych nigdy nie jest równa 40, czyli nie istnieje punkt spełniający warunki zadania.

---

2. Arek ma kartkę w kształcie rombu $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCD \leqslant 90°$. Najpierw zagina ją w taki sposób, aby odcinki CB oraz CD pokryły się na prostej CA, a następnie w taki sposób, aby otrzymać trójkąt, jak pokazano na rysunku.

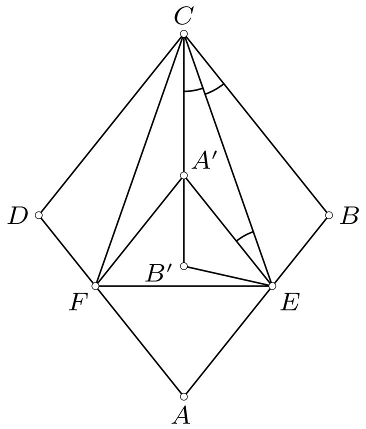


Udowodnij, że odległości punktu A od wszystkich trzech wierzchołków otrzymanego trójkąta są równe.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Rozwiązanie

Oznaczmy dwa pozostałe wierzchołki uzyskanego trójkąta przez E i F, jak pokazano na rysunku 1. W celu uniknięcia niejednoznaczności, pozostańmy przy oznaczeniach A, B, C, D dla wierzchołków wyjściowego rombu, a położenia punktów A, B, D po wykonaniu opisanych zagięć oznaczmy odpowiednio przez A', B', B'.



rys. 1

Sposób I

Ponieważ trójkąty BCE oraz $B'CE$ są przystające, więc $\sphericalangle BCE = \sphericalangle B'CE$. Ponieważ czworokąty $AEA'F$ oraz $ABCD$ są rombami, więc proste $A'E$ i BC są równoległe i w konsekwencji $\sphericalangle A'EC = \sphericalangle BCE$. Łącząc te dwie równości, otrzymujemy $\sphericalangle A'EC = \sphericalangle A'CE$, co oznacza, że trójkąt $A'CE$ jest równoramienny i $A'E = A'C$.

W pełni analogicznie (konfiguracja jest symetryczna względem prostej AC) uzasadniamy, że $A'F = A'C$.

Sposób II

Z symetrii konstrukcji opisanej w treści zadania wynika, że trójkąty $A'EF$ oraz CEF są równoramienne. Ponadto

$$\sphericalangle EA'F = \sphericalangle EAF = \sphericalangle BCD = 2\sphericalangle ECF.$$

Rozważmy okrąg ω o środku A' i promieniu $A'E = A'F$. Uzyskana równość $\sphericalangle ECF = \frac{1}{2}\sphericalangle EA'F$ w połączeniu z faktem, że punkty A' i C leżą po tej samej stronie prostej EF oznacza, że kąt ECF jest wpisany w okrąg ω. W szczególności punkt C leży na okręgu ω, czyli $A'C = A'E = A'F$, co było do udowodnienia.

Uwaga

W opisanej konfiguracji również odległości B' od wierzchołków trójkąta $A'EF$ są równe.

---

3. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że każda z liczb

$$|b-c|, \quad |c-a|, \quad |a-b|$$

jest większa od 1, ale mniejsza od 2?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie liczby a, b, c nie istnieją.

Sposób I

Zauważmy, że jeśli liczby spełniające warunki zadania istnieją, to żadne dwie z nich nie są równe (gdyż wówczas jedna z liczb $|b-c|$, $|c-a|$, $|a-b|$ byłaby równa 0).

Rozważmy dowolne trzy różne liczby rzeczywiste a, b, c i zaznaczmy odpowiadające im punkty na osi liczbowej. Pewien z tych punktów leży na odcinku o końcach w pozostałych dwóch — suma odległości tego punktu od końców odcinka jest równa długości całego odcinka. Innymi słowy, pośród liczb $|b-c|$, $|c-a|$, $|a-b|$, czyli odległości pomiędzy parami punktów, jedna jest równa sumie pozostałych dwóch. To oznacza, że nie istnieją liczby a, b, c spełniające warunki zadania, gdyż suma dwóch liczb większych od 1 nie jest mniejsza od 2.

Sposób II

Przypuśćmy, że takie liczby a, b, c istnieją. Załóżmy, że $a \leqslant b \leqslant c$ — w każdym innym przypadku rozwiązanie będzie przebiegało analogicznie, gdyż warunki zadania są symetryczne ze względu na a, b, c, tzn. nie zmieniają się w wyniku zamiany nazw tych niewiadomych. Otrzymujemy wówczas sprzeczność postaci

$$2 > |c-a| = c-a = (c-b)+(b-a) = |b-c|+|a-b| > 1+1 = 2.$$

To oznacza, że nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

---

4. Sto kamieni leży w jednym rzędzie. Wśród nich jest 50 kamieni czerwonych i 50 kamieni niebieskich. Wykaż, że można tak usunąć po 25 kamieni każdego koloru, aby pomiędzy dowolnymi dwoma kamieniami tego samego koloru nie pozostał ani jeden kamień innego koloru.

Rozwiązanie

Sposób I

Podzielmy rząd kamieni na dwie równe części (po 50 kolejnych kamieni), które nazwiemy lewą i prawą połową. Niech ℓ oznacza liczbę kamieni czerwonych należących do lewej połowy. Wówczas liczba kamieni czerwonych należących do prawej połowy to $50-\ell$. Liczby kamieni niebieskich należących do lewej i prawej połowy są odpowiednio równe $50-\ell$ oraz ℓ.

Jeżeli $\ell \leqslant 25$, to usuwając wszystkie czerwone kamienie z lewej połowy oraz wszystkie niebieskie kamienie z prawej połowy, doprowadzimy do sytuacji, w której po usunięciu co najwyżej 50 kamieni wszystkie kamienie lewej połowy będą niebieskie, a wszystkie kamienie prawej połowy będą czerwone. Usuwając dodatkowo dowolnie po $25-\ell$ kamieni każdego koloru, uzyskujemy sytuację opisaną w treści zadania.

Podobnie jeżeli $\ell > 25$, to usuwając wszystkie niebieskie kamienie z lewej połowy, wszystkie czerwone kamienie z prawej połowy i dowolne kamienie (tak, aby łącznie usunąć po 25 każdego koloru), również uzyskamy odpowiednie ułożenie.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie załóżmy, że kamienie ułożone są od lewej do prawej. Oznaczmy kolejne czerwone kamienie (od lewej do prawej) przez C_1, C_2, $\ldots$, C_{50}, a kolejne niebieskie kamienie — przez N_1, N_2, $\ldots$, N_{50}.

Jeżeli kamień C_{25} leży na lewo od kamienia N_{26}, to aby spełnić warunki zadania, wystarczy usunąć wszystkie kamienie czerwone o numerach większych od 25 oraz wszystkie kamienie niebieskie o numerach mniejszych od 26, czyli pozostawić kamienie ułożone następująco:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ C_{25},\ N_{26},\ N_{27},\ N_{28},\ \ldots, N_{50}.$$

Jeżeli kamień C_{25} leży na prawo od kamienia N_{26}, to również kamień C_{26} (leżący na prawo od C_{25}) leży na prawo od kamienia N_{25} (leżącego na lewo od kamienia N_{26}). W tym wypadku wystarczy usunąć kamienie czerwone o numerach mniejszych od 26 oraz kamienie niebieskie o numerach większych od 25, czyli pozostawić kamienie ułożone w następujący sposób:

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ \ldots,\ N_{25},\ C_{26},\ C_{27},\ C_{28},\ \ldots,\ C_{50}.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

5. Liczby całkowite a, b, c są większe od 1 i mają tę własność, że liczby

$$a, \quad a+b, \quad a+b+c, \quad b+c, \quad c$$

są pierwsze. Wykaż, że liczba b jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro liczby a, b, c są większe od 1, to liczby $a+b$, $a+b+c$, $b+c$ są większe od 2. Ponieważ liczby te są pierwsze i większe od 2, więc są nieparzyste. Stąd wynika, że liczby

$$(a+b+c)-(b+c)=a \quad \text{oraz} \quad (a+b+c)-(a+b)=c$$

są parzyste, jako różnice liczb nieparzystych. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, więc $a=c=2$.

Z warunków zadania wynika więc, że liczby $b+2$ oraz $b+4$ są pierwsze. Gdyby liczba b dawała resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $b+2$ byłaby podzielna przez 3 i jednocześnie większa od 3 — nie mogłaby więc być pierwsza. Podobnie gdyby liczba b dawała resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $b+4$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, czyli byłaby złożona. To oznacza, że liczba b jest podzielna przez 3, co było do udowodnienia.

Sposób II

Z warunków zadania wynika, że liczba pierwsza $a+b+c$ posiada następujące przedstawienia w postaci sumy dwóch liczb pierwszych

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Suma dwóch liczb pierwszych nieparzystych jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. To oznacza, że w każdej z par $a+b$, c oraz a, $b+c$ jedna z liczb jest równa 2. Skoro $a+b>2$ oraz $b+c>2$, to $a=c=2$.

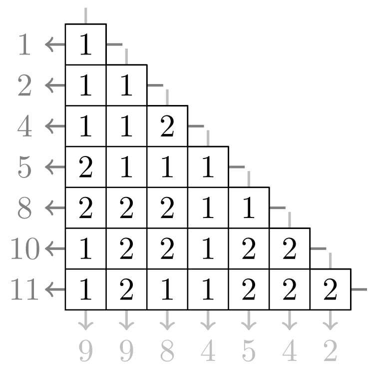
Przyjmijmy oznaczenie $a+b=p$. Z warunków zadania wynika, że liczby p oraz $p+2$ są pierwsze oraz $p\geqslant 4$ (gdyż $a\geqslant 2$ oraz $b\geqslant 2$). Zauważmy, że p, $p+1$, $p+2$ to trzy kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest podzielna przez 3. Liczby p, $p+2$ nie są podzielne przez 3, gdyż są to liczby pierwsze większe od 3. Wobec tego liczba $p+1$ jest podzielna przez 3. W konsekwencji również liczba

$$(p+1)-3=p-2=b$$

jest podzielna przez 3.

6. Z tablicy $n\times n$ usunięto pola znajdujące się w całości powyżej jednej z przekątnych, otrzymując schodkowy diagram. W każde pole diagramu należy wpisać jedną z liczb 1 lub 2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n\geqslant 2$, dla których można to zrobić w taki sposób, aby pośród $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach nie było dwóch równych liczb.

Rysunek przedstawia przykładowe wypełnienie diagramu dla $n=7$ oraz rozważane $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach.



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Rozwiązanie

Odpowiedź: Wszystkie $n \geqslant 2$, które są liczbami parzystymi.

Sposób I

Przypuśćmy, że wypełnienie diagramu spełnia warunki zadania dla pewnego n. Największą możliwą do uzyskania sumą liczb w wierszu lub kolumnie jest $2n$, a najmniejszą jest 1. Jest zatem tylko $2n$ całkowitych wartości, które mogą przyjmować określone w zadaniu sumy. Skoro żadne dwie nie są równe, to każda z liczb $1, 2, 3, \ldots, 2n$ pojawia się dokładnie jeden raz jako suma w wierszu lub kolumnie.

Rozważmy sumę $2n$ sum zdefiniowanych w treści zadania. Z jednej strony wynik jest liczbą parzystą, bo jest dwukrotnością sumy wszystkich liczb wpisanych w pola diagramu. Z drugiej strony, jest równy

$$1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n=(1+2n)+(2+(2n-1))+(3+(2n-2))+\ldots+(n+(n+1))=$$
$$=(2n+1)+(2n+1)+(2n+1)+\ldots+(2n+1)=n(2n+1).$$

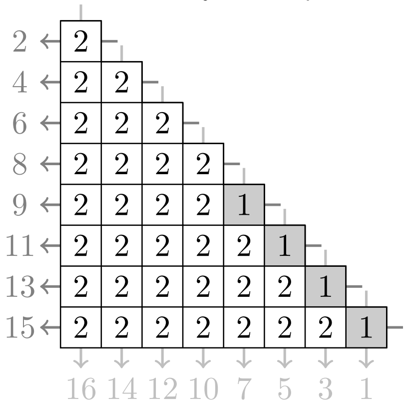
Ponieważ $2n+1$ jest liczbą nieparzystą, więc liczba $n(2n+1)$ jest parzysta dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. To oznacza, że dla n nieparzystych nie jest możliwe wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania.

Pozostaje uzasadnić, że jeśli n jest liczbą parzystą, to wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania jest możliwe. Niech $n=2k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyróżnijmy dolną połowę pól najdłuższej przekątnej diagramu (rys. 2) i rozważmy wypełnienie diagramu, w którym w wyróżnione pola wpisana jest liczba 1, a we wszystkie pozostałe — liczba 2. Uzasadnimy, że to wypełnienie spełnia warunki zadania, co zakończy rozwiązanie.

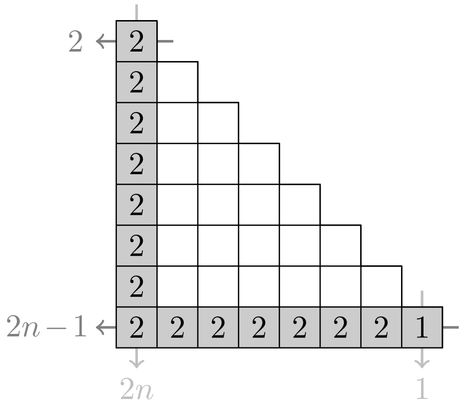
W rozważanym wypełnieniu sumy liczb w k pierwszych (licząc od góry) wierszach diagramu są równe $2, 4, 6, \ldots, 2k-2, 2k$, a sumy liczb w k pierwszych (licząc od lewej) kolumnach diagramu są równe $4k, 4k-2, 4k-4, \ldots, 2k+4, 2k+2$. Pośród wymienionych $2k$ sum pojawiają się wszystkie liczby parzyste z zakresu od 1 do $4k$.

Z kolei sumy w k ostatnich kolumnach diagramu są równe $2k-1, 2k-3, 2k-5, \ldots, 3, 1$, a sumy w k ostatnich wierszach diagramu są równe $2k+1, 2k+3, 2k+5, \ldots, 4k-3, 4k-1$. Łącznie pośród wymienionych $2k$ sum pojawiają się wszystkie liczby nieparzyste z zakresu od 1 do $4k$.

W opisanym wypełnieniu diagramu każda liczba całkowita od 1 do $4k=2n$ pojawia się jako suma dokładnie raz, więc rzeczywiście spełnia ono warunki zadania.



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że jeśli wypełnienie spełnia warunki zadania, to każda z liczb $1, 2, 3, \ldots, 2n$ pojawia się jako wartość sumy dokładnie raz.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Załóżmy, że pewna liczba n oraz pewne wypełnienie diagramu spełniają warunki zadania.

Zauważmy, że suma co najwyżej $n-1$ składników równych 1 lub 2 jest równa co najwyżej $2n-2$. To oznacza, że sumy $2n-1$ oraz $2n$ można uzyskać wyłącznie w rzędach składających się z n pól — czyli pierwszej kolumnie i ostatnim wierszu diagramu. W konsekwencji łącznie pierwsza (licząc od lewej) kolumna i ostatni (licząc od góry) wiersz diagramu zawierają dokładnie jedną liczbę 1.

Rozważmy lewe górne oraz prawe dolne pole diagramu. Gdyby w obydwa te pola wpisana została liczba 2, to pierwszy wiersz diagramu oraz ostatnia kolumna diagramu miałyby tę samą sumę wpisanych liczb — równą 2. To oznacza, że wspomniana (jedyna) liczba 1 znajdująca się w pierwszej kolumnie lub ostatnim wierszu znajduje się w jednym z tych dwóch pól (a w drugim z nich znajduje się 2). W szczególności oznacza to, że wspomniane pola są różne, czyli $n \neq 1$. Ponieważ zamiana miejscami liczb w tych dwóch polach nie wpływa na sumy liczb w pozostałych rzędach, możemy założyć, że liczba 1 znajduje się w ostatnim polu dolnego wiersza.

Do wypełnienia pozostały $n-2$ wiersze oraz $n-2$ kolumny diagramu — w każdym z tych rzędów znajduje się już po jednej liczbie 2, a do uzyskania pozostały wszystkie całkowite sumy od 3 do $2n-2$. W istocie więc do wypełnienia pozostał analogiczny diagram o $n-2$ wierszach i $n-2$ kolumnach, w którym każdą z sum od 1 do $2(n-2)$ chcemy uzyskać dokładnie raz (rys. 3). Innymi słowy, wypełnienie diagramu o boku n jest możliwe dokładnie wtedy, gdy jest możliwe wypełnienie diagramu o boku $n-2$.

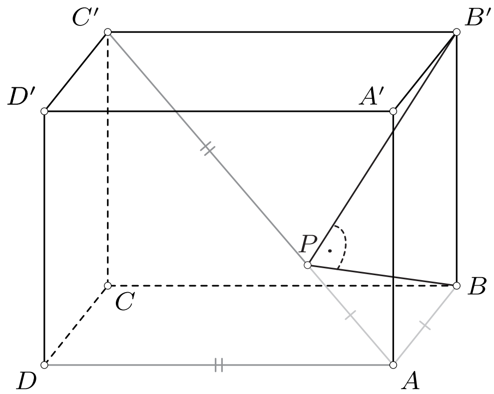
Jeżeli n jest liczbą parzystą, to stosując wielokrotnie analogiczne rozumowanie, uzyskujemy wypełnienie spełniające warunki zadania (to samo, co w poprzednim sposobie). Jeśli zaś n jest liczbą nieparzystą, to w wyniku opisanych redukcji dochodzimy do problemu wypełnienia diagramu o jednym polu, co jest niemożliwe — dla n nieparzystych nie jest więc możliwe wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania.

Uwaga

Rozumowanie przeprowadzone w drugim sposobie rozwiązania pozwala scharakteryzować wszystkie poprawne wypełnienia diagramu w przypadku, gdy n jest liczbą parzystą. Są to te wypełnienia, w których wszystkie liczby wpisane poza przekątną są równe 2, a w polach na przekątnej znajduje się po $\frac{n}{2}$ dwójek i jedynek, przy czym dla $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ w kolumnie i-tej od lewej znajduje się inna liczba niż w wierszu i-tym od dołu.

---

7. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$ o wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku, w którym $AC' = AB + AD$. Niech P będzie takim punktem na odcinku AC', że $AP = AB$ oraz $C'P = AD$. Udowodnij, że $\sphericalangle BPB' = 90°$.



Rozwiązanie

Sposób I

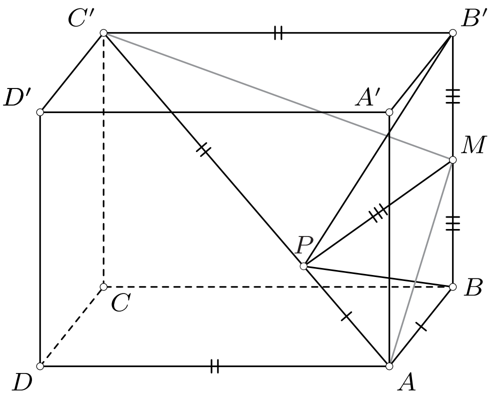
Oznaczmy przez M punkt przecięcia płaszczyzny prostopadłej do odcinka AC' przechodzącej przez punkt P z prostą BB' (rys. 4). Ponieważ $\sphericalangle MPA = \sphericalangle MBA = 90^\circ$ oraz $AP = AB$, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$MP^2 = MA^2 - AP^2 = MA^2 - AB^2 = MB^2, \quad \text{skąd} \quad MP = MB.$$

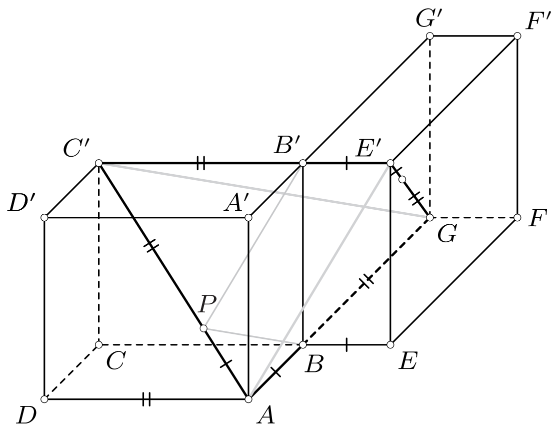
Podobnie, skoro $\sphericalangle MPC' = \sphericalangle MB'C' = 90^\circ$ oraz $PC' = B'C'$, to

$$MP^2 = MC'^2 - PC'^2 = MC'^2 - B'C'^2 = MB'^2, \quad \text{skąd} \quad MP = MB'.$$

Uzyskane równości $MP = MB = MB'$ oznaczają, że punkt M jest środkiem odcinka BB', a trójkąt BPB' jest prostokątny i $\sphericalangle BPB' = 90^\circ$.



rys. 4



rys. 5

Sposób II

Niech E będzie takim punktem leżącym na półprostej $CB^{\rightarrow}$, że $BE = AB$, a G — takim punktem leżącym na półprostej $AB^{\rightarrow}$, że $BG = AD$ (rys. 5). Niech ponadto F będzie takim punktem, że czworokąt $BEFG$ jest prostokątem, a punkty E', F', G' — takie, że odcinki BB', EE', FF', GG' są równe i równoległe.

W ten sposób uzyskaliśmy prostopadłościan $BEFGB'E'F'G'$ przystający do danego w treści zadania (gdyż ma jednakowe wymiary). Zauważmy, że

$$AC' = C'E' = E'G = GA,$$

skąd wniosek, że proste AE' oraz GC' są prostopadłe (punkty C' oraz G są jednakowo oddalone od końców odcinka AE', więc leżą na jego płaszczyźnie symetralnej).

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że $PB' \parallel AE'$ (trójkąty równoramienne $PB'C'$ oraz $AE'C'$ mają wspólny kąt między ramionami) oraz $BP \parallel GC'$ (trójkąty równoramienne PAB oraz $C'AG$ mają wspólny kąt między ramionami).

Uwaga

Można obliczyć, że przy oznaczeniach $a = AB = AP$ oraz $b = AD = PC'$, zachodzą równości

$$BB'^2 = 2ab, \quad BP^2 = \frac{a}{a+b} \cdot 2ab, \quad B'P^2 = \frac{b}{a+b} \cdot 2ab.$$

Skoro $BB'^2 = BP^2 + B'P^2$, to teza zadania wynika z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej