XX Olimpiada Matematyczna Juniorów (2024/25)

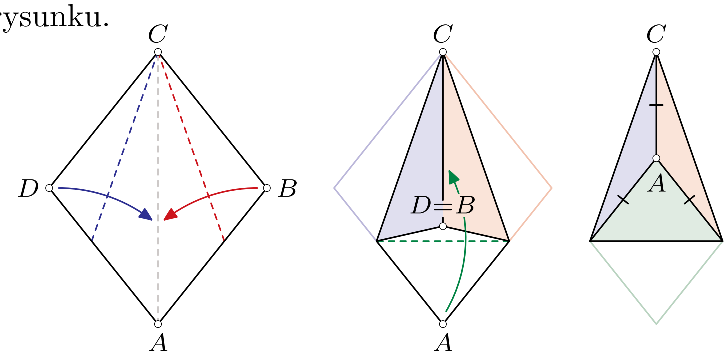
Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 22 października 2024 r.)

1. Czy wewnątrz kwadratu o boku długości 20 istnieje punkt, którego odległości od boków tego kwadratu są czterema kolejnymi liczbami całkowitymi?

2. Arek ma kartkę w kształcie rombu $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCD \leqslant 90°$. Najpierw zagina ją w taki sposób, aby odcinki CB oraz CD pokryły się na prostej CA, a następnie w taki sposób, aby otrzymać trójkąt, jak pokazano na rysunku.

Udowodnij, że odległości punktu A od wszystkich trzech wierzchołków otrzymanego trójkąta są równe.



3. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że każda z liczb

$$|b-c|, \quad |c-a|, \quad |a-b|$$

jest większa od 1, ale mniejsza od 2?

4. Sto kamieni leży w jednym rzędzie. Wśród nich jest 50 kamieni czerwonych i 50 kamieni niebieskich. Wykaż, że można tak usunąć po 25 kamieni każdego koloru, aby pomiędzy dowolnymi dwoma kamieniami tego samego koloru nie pozostał ani jeden kamień innego koloru.

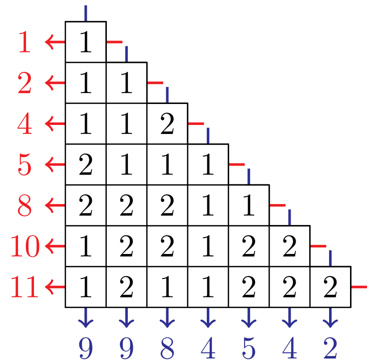
5. Liczby całkowite a, b, c są większe od 1 i mają tę własność, że liczby

$$a, \quad a+b, \quad a+b+c, \quad b+c, \quad c$$

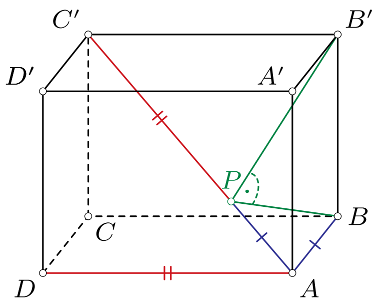
są pierwsze. Wykaż, że liczba b jest podzielna przez 3.

6. Z tablicy $n \times n$ usunięto pola znajdujące się w całości powyżej jednej z przekątnych, otrzymując schodkowy diagram. W każde pole diagramu należy wpisać jedną z liczb 1 lub 2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których można to zrobić w taki sposób, aby pośród $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach nie było dwóch równych liczb.

Rysunek przedstawia przykładowe wypełnienie diagramu dla $n = 7$ oraz rozważane $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach.



7. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$ o wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku, w którym $AC' = AB + AD$. Niech P będzie takim punktem na odcinku AC', że $AP = AB$ oraz $C'P = AD$. Udowodnij, że $\sphericalangle BPB' = 90°$.



Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

22 października 2024 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omj.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.