XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(15 marca 2025 r.)

1. Czy istnieje czworościan, w którym długości krawędzi są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, a ich suma jest równa 25? Odpowiedź uzasadnij.

2. W pewnej imprezie biorą udział chłopcy i dziewczęta. Każda z osób uczestniczących w tej imprezie zna wśród pozostałych osób dokładnie 3 chłopców i dokładnie 7 dziewcząt. Udowodnij, że liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest podzielna przez 20.

Uwaga. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

3. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p,q), dla których liczba $pq+4$ jest czwartą potęgą liczby pierwszej.

4. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 100^\circ$. Punkt P leży na boku CD, przy czym $\sphericalangle PBC = 20^\circ$. Prosta równoległa do boku AD przechodząca przez punkt P przecina przekątną AC w punkcie Q. Wykaż, że $BP = AQ$.

5. W każdym polu tablicy 5×5 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można usunąć z tej tablicy dokładnie dwadzieścia strzałek, tak aby żadne dwie z pozostałych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda strzałka wskazuje na wszystkie pola znajdujące się w tym kierunku, w którym jest skierowana. Żadna strzałka nie wskazuje na pole, w którym się znajduje.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej