Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD, BCE, CDA, DEB i EAC są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

Rozwiązanie
Trójkąty ABD i CDA mają równe pola oraz wspólny bok AD. Wobec tego wysokości tych trójkątów poprowadzone do boku AD są równe. Ponadto punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej AD. Stąd wniosek, że przekątna AD jest równoległa do boku BC.
Analogicznie dowodzimy, że pozostałe cztery przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równoległe do odpowiednich boków tego pięciokąta.

Uwaga: Istnieją pięciokąty $ABCDE$ spełniające warunki zadania, które nie są foremne.

---

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

Rozwiązanie
Ponieważ $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$, więc $b^2=(b-a)(a+b)+a^2$. Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę $a+b$, a zatem liczba b^2 jest także podzielna przez liczbę $a+b$.

---

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy A, B i C, że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

Rozwiązanie
Nazwijmy danych zawodników $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i przyjmijmy, że siedzą oni przy okrągłym stole w wymienionej kolejności, zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Wtedy, na mocy warunków zadania, A_1 wygrał z A_2, A_2 wygrał z A_3, $\ldots$, A_{n-1} wygrał z A_n oraz A_n wygrał z A_1.
Jeśli ponadto zawodnik A_1 wygrał z zawodnikiem A_{n-1}, to przyjmując $A=A_1$, $B=A_{n-1}$, $C=A_n$, otrzymujemy trójkę zawodników A, B, C spełniającą tezę zadania.
Załóżmy więc, że A_{n-1} wygrał z A_1 i usuńmy zawodnika A_n od stołu. Wtedy pozostałych $n-1$ zawodników $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ spełnia założenia treści zadania: każdy z nich wygrał z osobą, która siedzi obok niego, po jego lewej stronie. Kontynuując zatem powyższe rozumowanie i usuwając kolejnych zawodników, doprowadzimy do sytuacji, w której przy stole pozostaną tacy trzej zawodnicy A_1, A_2, A_3, że A_1 wygrał z A_2, A_2 wygrał z A_3 oraz A_3 wygrał z A_1. Przyjmując wtedy $A=A_1$, $B=A_2$, $C=A_3$, dostajemy trójkę zawodników A, B, C spełniającą tezę zadania.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Udowodnij, że dla każdych liczb x, y należących do przedziału $(0,1)$ spełniona jest nierówność
$$x(1-y)^2+y(1-x)^2<(1-xy)^2\,.$$

Rozwiązanie

Daną w treści zadania nierówność przekształcamy równoważnie, uzyskując kolejno:
$$\begin{aligned} x(1-y)^2+y(1-x)^2 &< (1-xy)^2\\ x(1-2y+y^2)+y(1-2x+x^2) &< 1-2xy+x^2y^2\\ x+xy^2+y+yx^2 &< 1+2xy+x^2y^2\\ (x+y)+xy(x+y) &< (1+xy)^2\\ (x+y)(1+xy) &< (1+xy)^2\,. \end{aligned}$$

Liczby x, y są dodatnie, więc $1+xy>0$. Dzieląc zatem obie strony otrzymanej nierówności przez $1+xy$ i kontynuując przekształcenia równoważne, dostajemy
$$\begin{aligned} 1+xy-x-y &> 0\\ (1-x)(1-y) &> 0\,. \end{aligned}$$

Uzyskana nierówność jest spełniona, gdyż obie liczby x, y są mniejsze od 1. Dowód jest więc zakończony.

---

5. Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A, B, C, D wierzchołki danego czworościanu foremnego. Poprowadźmy płaszczyznę styczną do sfery wpisanej w ten czworościan, równoległą do płaszczyzny ABC i różną od płaszczyzny ABC. Przyjmijmy, że przecina ona krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach K, L i M.

Środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ dzieli wysokość proprowadzoną z wierzchołka D w stosunku $1:3$ licząc od podstawy ABC. Wynika stąd, że płaszczyzna KLM przechodzi przez środek tej wysokości. Ponieważ płaszczyzna KLM jest równoległa do płaszczyzny ABC, więc na mocy twierdzenia Talesa, punkty K, L i M są odpowiednio środkami krawędzi AD, BD i CD.

W analogiczny sposób określamy trzy płaszczyzny równoległe do pozostałych ścian. Jeśli więc przez N, P i Q oznaczymy odpowiednio środki krawędzi AB, BC i AC, to sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna także do płaszczyzn KNQ, LNP i MPQ.

Długości krawędzi każdego z czworościanów foremnych $AKNQ$, $BLNP$, $CMPQ$ i $DKLM$ są równe i wynoszą $\frac{1}{2}$ długości krawędzi czworościanu $ABCD$. Zatem kule wpisane w te czworościany mają promienie równe $\frac{1}{2}$. Ponadto w kuli wpisanej w czworościan $ABCD$ możemy umieścić dwie kule o promieniu $\frac{1}{2}$ mające dokładnie jeden punkt wspólny. W ten sposób w czworościan $ABCD$ umieściliśmy 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, z których każde dwie mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego