X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(7 marca 2015 r.)

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki $a+b=c+d$ oraz $ac=bd$. Udowodnij, że $a=d$ oraz $b=c$.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC<BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC tego trójkąta, przy czym $AE=BD$. Wykaż, że symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

3. Na każdej ścianie sześcianu napisano pewną liczbę całkowitą. Następnie każdej krawędzi sześcianu przyporządkowano sumę liczb z dwóch ścian, pomiędzy którymi znajduje się dana krawędź. Udowodnij, że wśród dwunastu liczb przyporządkowanych krawędziom są co najmniej cztery liczby parzyste.

4. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p>q>r>s$ oraz $p-q=q-r=r-s$. Udowodnij, że liczba $p-s$ jest podzielna przez 18.

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku