X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia

(7 marca 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki $a+b=c+d$ oraz $ac=bd$. Udowodnij, że $a=d$ oraz $b=c$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Dodając do obu stron równości $ac=bd$ wielkość ad, otrzymujemy

$$ac+ad=bd+ad, \quad \text{czyli} \quad a(c+d)=d(a+b).$$

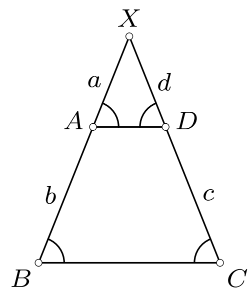
Wobec tego, skoro $a+b=c+d\neq 0$, to $a=d$. Wówczas równość $a+b=c+d$ przybiera postać $a+b=c+a$, czyli $b=c$.

Sposób II

Rozważmy trójkąt równoramienny XBC, w którym

$$XB=XC=a+b=c+d$$

oraz takie punkty A i D odpowiednio na bokach XB, XC, że $XA=a$, $XD=d$ (rys. 1). Wówczas z warunku $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste AD oraz BC są równoległe. Stąd wniosek, że trójkąt XAD także jest równoramienny. Tym samym $a=d$ i w konsekwencji $b=c$.



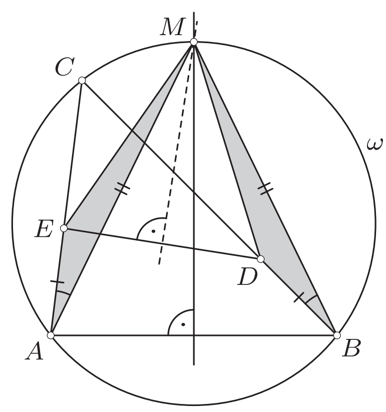
rys. 1

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC<BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC tego trójkąta, przy czym $AE=BD$. Wykaż, że symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie ABC. Niech M będzie tym punktem przecięcia symetralnej odcinka AB z okręgiem ω, który leży po tej samej stronie prostej AB, co punkt C (rys. 2). Udowodnimy, że punkt M leży na symetralnej odcinka DE.

Punkt M leży na symetralnej odcinka AB, skąd wniosek, że $AM=BM$. Ponadto zachodzi równość $\sphericalangle CAM=\sphericalangle CBM$ — kątów wpisanych w okrąg ω opartych na tym samym łuku. Powyższe zależności w połączeniu z rówością $AE=BD$ dowodzą, że trójkąty AEM i BDM są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $EM=DM$, czyli punkt M leży na symetralnej odcinka DE.



rys. 2

3. Na każdej ścianie sześcianu napisano pewną liczbę całkowitą. Następnie każdej krawędzi sześcianu przyporządkowano sumę liczb z dwóch ścian, pomiędzy którymi znajduje się dana krawędź. Udowodnij, że wśród dwunastu liczb przyporządkowanych krawędziom są co najmniej cztery liczby parzyste.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

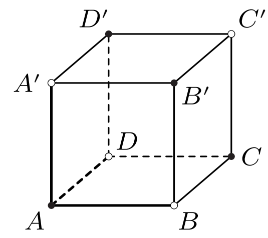
Szkic rozwiązania

Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie danym sześcianem (rys. 3). Zauważmy, że wśród liczb napisanych na ścianach $ABCD$, $AA'B'B$, $ADD'A'$ są co najmniej dwie liczby tej samej parzystości, czyli obie parzyste lub obie nieparzyste. Stąd wniosek, że co najmniej jednej z krawędzi AB, AA', AD przyporządkowana została liczba parzysta, gdyż suma dwóch liczb tej samej parzystości jest parzysta.

Analogicznie uzasadniamy, że co najmniej jednej krawędzi w każdej z trójek

$$CB,\ CC',\ CD, \quad B'A',\ B'B',\ B'C' \quad \text{oraz} \quad D'A',\ D'B',\ D'D$$

została przyporządkowana liczba parzysta. To oznacza, że łącznie krawędziom sześcianu zostały przyporządkowane co najmniej cztery liczby parzyste.



rys. 3

Uwaga: Można uzasadnić, że jest tylko 10 różnych możliwych wzajemnych ułożeń liczb napisanych na ścianach sześcianu z dokładnością do reszty z dzielenia przez 2. Inny sposób rozwiązania zadania można uzyskać, rozpatrując każdy z tych przypadków osobno.

---

4. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p>q>r>s$ oraz $p-q=q-r=r-s$. Udowodnij, że liczba $p-s$ jest podzielna przez 18.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a wspólną wartość różnic $p-q$, $q-r$, $r-s$. Wówczas

$$p-s=(p-q)+(q-r)+(r-s)=3a\,.$$

Należy więc udowodnić, że a jest liczbą podzielną przez 6.

Wiemy, że $p>q$, wobec czego $a>0$.

Skoro $s\geqslant 2$, to liczby pierwsze q i r są większe od 2. Obie są więc nieparzyste, skąd wniosek, że liczba $a=q-r$ jest parzysta. Pozostaje zatem wykazać, że liczba a jest podzielna przez 3.

Przypuśćmy przeciwnie, że liczba a nie dzieli się przez 3. Zauważmy, że $r=s+a$, $q=r+a=s+2a$ oraz $p=q+a=s+3a$.

Liczba pierwsza s jest różna od 3, gdyż w przeciwnym razie liczba $p=s+3a=3+3a$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, a więc nie byłaby liczbą pierwszą. Stąd wniosek, że liczba s nie jest podzielna przez 3.

Jeśli teraz liczby a i s dają różne reszty z dzielenia przez 3, to jedna z nich daje resztę 1, druga — resztę 2. Wtedy liczba $r=a+s$ jest podzielna przez 3 i większa od 3, czyli nie jest liczbą pierwszą. Jeśli natomiast liczby a i s dają taką samą resztę z dzielenia przez 3, to wtedy liczba $q=s+2a$ jest podzielna przez 3 i większa od 3, a więc również nie jest liczbą pierwszą.

Uzyskana sprzeczność oznacza, że a jest liczbą podzielną przez 3, co kończy rozwiązanie.

---

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że jeżeli co najmniej cztery spośród danych sześciu trójkątów mają równe pola, to wszystkie sześć trójkątów mają równe pola. Tym samym uzyskamy negatywną odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania.

Zauważmy, że jeżeli cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP mają równe pola, to w co najmniej jednej z par

$$AFP,\ BFP, \qquad BDP,\ CDP \qquad \text{oraz} \qquad CEP,\ AEP$$

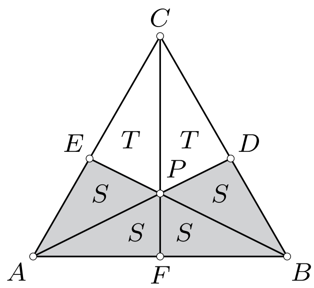
obydwa trójkąty mają równe pola. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $[AFP]=[BFP]=S$, gdzie przez $[\mathcal{F}]$ rozumiemy pole figury $\mathcal{F}$.

Ponieważ trójkąty AFP i BFP mają równe pola i tę samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P, więc mają także podstawy równej długości, czyli $AF=BF$. To oznacza, że prosta CF jest osią symetrii trójkąta ABC, skąd $[AEP]=[BDP]$ oraz $[CDP]=[CEP]$. Ponieważ dokładnie cztery spośród rozważanych sześciu trójkątów mają pola S, więc w dokładnie jednej z powyższych równości pola są równe S.

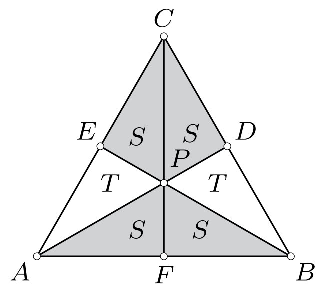
Przypuśćmy, że $[AEP]=[BDP]=S$ oraz $[CDP]=[CEP]=T\neq S$ (rys. 4). Wówczas, ponieważ stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{T}{S}=\frac{[CDP]}{[BDP]}=\frac{CD}{BD}=\frac{[ACD]}{[ABD]}=\frac{2T+S}{3S}.$$

Stąd otrzymujemy $3T=2T+S$, czyli $T=S$. W tym przypadku dochodzimy zatem do sprzeczności.



rys. 4



rys. 5

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym zachodzą równości $[CDP]=[CEP]=S$. Niech tym razem $[AEP]=[BDP]=T\neq S$ (rys. 5). Zauważmy, że wówczas

$$[ABD]=2S+T=[ACD].$$

Trójkąty ABD oraz ACD mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka A i równe pola, więc ich podstawy także są równe, czyli $BD=CD$. To oznacza, że punkt P, jako punkt przecięcia dwóch środkowych w trójkącie ABC, jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Wówczas wszystkie sześć trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP to trójkąty przystające, więc pole każdego z nich jest równe S wbrew założeniu $S\neq T$.

Podsumowując, nie jest możliwe, aby doładnie cztery z danych sześciu trójkątów miały równe pola.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku