XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(16 stycznia 2016 r.)

1. Wyznacz wszystkie takie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb

$$a+b, \quad b+c, \quad c+a \quad \text{oraz} \quad a+b+c$$

jest pierwsza.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty X i Y różne od A, że $AD=DX$ oraz $AB=BY$. Udowodnij, że $CX=CY$.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$a+b=cd \quad \text{oraz} \quad c+d=ab.$$

Wykaż, że $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\geqslant 0$.

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle BAC+\sphericalangle MCB=90^\circ.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

5. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano pewne 50 i pokolorowano je na biało. Pozostałe wierzchołki pokolorowano na czerwono. Udowodnij, że wierzchołki tego 100-kąta można tak podzielić na 25 grup po 4 punkty, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami prostokąta o dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku