Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb

$$a+b, \quad b+c, \quad c+a \quad \text{oraz} \quad a+b+c$$

jest pierwsza.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że co najmniej jedna z liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest parzysta. Istotnie, gdyby wszystkie one były nieparzyste, to ich suma byłaby też nieparzysta, gdy tymczasem liczba $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$ jest parzysta. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że liczba $a+b$ jest parzysta.

Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, skąd otrzymujemy $a+b=2$, a zatem $a=b=1$. Wówczas $c+a=c+1$ oraz $a+b+c=c+2$ to liczby pierwsze, które różnią się o 1, więc mniejsza z nich jest równa 2, a większa 3. Stąd uzyskujemy $c+1=2$, czyli $c=1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a,b,c)=(1,1,1)$ spełnia warunki zadania.

Sposób II

Przypuśćmy, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, powiedzmy a, jest nie mniejsza od 2. Wówczas liczby $a+b$, $a+c$, $a+b+c$ są pierwsze i nie mniejsze od 3, więc są to liczby nieparzyste. W takim razie liczby $(a+b+c)-(a+b)=c$ oraz $(a+b+c)-(a+c)=b$ są parzyste, jako różnice liczb nieparzystych. To jednak oznacza, że $b+c$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Uzyskana sprzeczność oznacza, że wszystkie liczby a, b, c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a,b,c)=(1,1,1)$ spełnia warunki zadania.

Sposób III

Ponieważ $a+b+c$ jest liczbą pierwszą nie mniejszą od 3, więc jest to liczba nieparzysta. Stąd wynika, że wśród liczb a, b, c jest parzysta liczba liczb parzystych. Jeżeli są dokładnie dwie liczby parzyste, to ich suma jest liczbą złożoną, jako liczba parzysta większa od 2, wbrew warunkom zadania.

Wobec tego każda z liczb a, b, c jest nieparzysta. Suma każdych dwóch z nich jest z jednej strony liczbą pierwszą (co wynika z warunków zadania), z drugiej zaś liczbą parzystą. Wobec tego każda z liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest równa 2. Stąd wniosek, że wszystkie liczby a, b, c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a,b,c)=(1,1,1)$ spełnia warunki zadania.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty X i Y różne od A, że $AD=DX$ oraz $AB=BY$. Udowodnij, że $CX=CY$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $DX=AD=BC$ oraz $BY=AB=CD$, więc trapezy $BCDX$ i $BCDY$ są równoramienne i nie są równoległobokami (rys. 1). Stąd wniosek, że $CX=BD$ i $CY=BD$. Łącząc te równości, uzyskujemy tezę zadania.

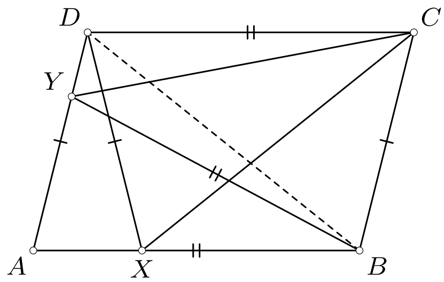
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku



rys. 1

Sposób II

Z równości $CD = AB = YB$, $DX = AD = BC$ oraz

$$\sphericalangle CDX = \sphericalangle DXA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BYA = \sphericalangle YBC$$

wynika, że trójkąty CDX i YBC są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że $CX = CY$, co należało wykazać.

---

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$a+b = cd \quad \text{oraz} \quad c+d = ab.$$

Wykaż, że $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geqslant 0$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że zachodzą równości

$$(a+1)(b+1) = ab+a+b+1 = a+b+c+d+1,$$

oraz analogicznie

$$(c+1)(d+1) = cd+c+d+1 = a+b+c+d+1.$$

Stąd wniosek, że

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a+b+c+d+1)^2.$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia pomocnicze $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$, $t = d+1$; wówczas teza zadania przybiera postać $xyzt \geqslant 0$. Podstawiając $a = x-1$, $b = y-1$, $c = z-1$, $d = t-1$ do warunku $a+b = cd$, otrzymujemy

$$x+y-2 = (z-1)(t-1), \quad \text{skąd} \quad x+y-2 = zt-z-t+1$$

i w konsekwencji $x+y+z+t = zt+3$. Postępując analogicznie, z warunku $c+d = ab$ otrzymujemy

$$x+y+z+t = xy+3.$$

Łącząc otrzymane równości, stwierdzamy, że $xy = zt$, skąd $xyzt = (xy)^2 \geqslant 0$.

---

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC, przy czym

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle MCB = 90^\circ.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

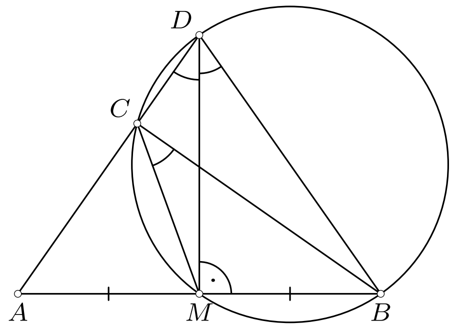
Szkic rozwiązania

Sposób I

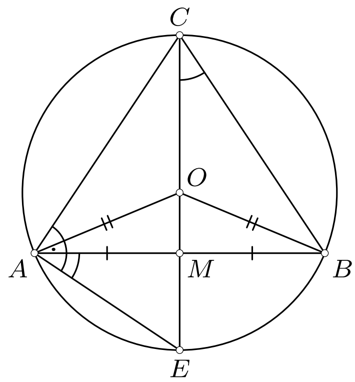
Przypuśćmy, że $AC \neq BC$. Wykażemy, że wówczas $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, co zakończy rozwiązanie zadania. Oznaczmy przez D punkt przecięcia symetralnej boku AB z prostą AC. Wówczas punkty C i D są różne (rys. 2). Z równości

$$\sphericalangle MDB = \sphericalangle MDA = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle MCB$$

wynika, że punkty B, C, D, M leżą na jednym okręgu. Ponieważ $\sphericalangle BMD = 90^\circ$, więc jest to okrąg o średnicy BD. Stąd wniosek, że $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Przyjmijmy, że prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do boku AC przecina prostą CM w punkcie E (rys. 3). Ponieważ

$$\sphericalangle EAB = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle MCB = \sphericalangle ECB,$$

więc na czworokącie $AEBC$ można opisać okrąg. Niech O będzie środkiem tego okręgu. Skoro $\sphericalangle EAC = 90^\circ$, to punkt O jest środkiem odcinka CE — średnicy okręgu.

Jeżeli $O = M$, to trójkąt ABC jest prostokątny. Jeżeli natomiast $O \neq M$, to na mocy cechy bok–bok–bok, trójkąty OMA i OMB są przystające. Skoro $\sphericalangle AMO + \sphericalangle BMO = 180^\circ$, to $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO = 90^\circ$. Wobec tego prosta OM jest symetralną odcinka AB, skąd wniosek, że $AC = BC$.

---

5. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano pewne 50 i pokolorowano je na biało. Pozostałe wierzchołki pokolorowano na czerwono. Udowodnij, że wierzchołki tego 100-kąta można tak podzielić na 25 grup po 4 punkty, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami prostokąta o dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach.

Szkic rozwiązania

Weźmy pod uwagę 50 par przeciwległych wierzchołków danego 100-kąta foremnego i przez b oznaczmy liczbę par o obu wierzchołkach białych (nazwiemy te pary *białymi*), przez c o obu wierzchołkach czerwonych (nazwiemy je *czerwonymi*), a przez d o jednym wierzchołku białym i jednym czerwonym (pary *dwukolorowe*). Ponieważ zarówno białych, jak i czerwonych wierzchołków jest dokładnie 50, więc

$$2b + d = 50 \quad \text{oraz} \quad 2c + d = 50,$$

skąd $b = c$ oraz $d = 2(25 - b)$. Ponieważ każde dwie z rozważanych par wyznaczają prostokąt, więc łącząc każdą parę białą z parą czerwoną, uzyskamy $b = c$ prostokątów o dokładnie dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach. Pozostałe d dwukolorowych par możemy połączyć po dwie, gdyż d jest liczbą parzystą, otrzymując tym samym pozostałe $\frac{1}{2}d$ prostokątów.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku