XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia

(12 stycznia 2019 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

1. Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2+x\leqslant y$. Udowodnij, że $y^2+y\geqslant x$.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $\sphericalangle ABC=90^\circ$. Dwusieczna kąta BAD przecina odcinek BC w punkcie P. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle APD=45^\circ$, to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP.

3. Dany jest 101-kąt foremny. Prosta ℓ leży w płaszczyźnie tego wielokąta i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Udowodnij, że prosta ℓ przecina parzystą liczbę przekątnych danego wielokąta.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=3\cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP=PQ=QB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ=90^\circ$.

5. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku