XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia

(23 stycznia 2021 r.)

1. Liczby a, b spełniają warunek $2a+a^2=2b+b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE>EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF=DE$. Udowodnij, że $\sphericalangle DEF=90^\circ$.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, dla których liczba $5a+3b$ jest podzielna przez liczbę $a+b$. Wykaż, że $a=b$.

4. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB+BK=AD+DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL.

5. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

Uwaga:

Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również B zna A.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej