XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(15 stycznia 2022 r.)

1. Odcinki AB i CD są prostopadłe i przecinają się w punkcie X. Ponadto spełnione są równości

$$AC = BD, \quad AD = BX \quad \text{oraz} \quad DX = 1.$$

Wyznacz długość odcinka CX.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$ oraz jej dodatnie dzielniki a i b, które spełniają równość $a+b+ab=n$. Wykaż, że $a=b$.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 100$ pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle CDE = 90^\circ, \quad AC = AD \quad \text{oraz} \quad BD = BE.$$

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne są mniejsze od 180°.

5. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą nieparzystą. Na prostej zaznaczono n punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest liczbą całkowitą. Okazało się, że każdy zaznaczony punkt ma parzystą sumę odległości od pozostałych $n-1$ zaznaczonych punktów. Wykaż, że odległość między każdymi dwoma zaznaczonymi punktami jest liczbą parzystą.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki