XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (15 stycznia 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Odcinki AB i CD są prostopadłe i przecinają się w punkcie X. Ponadto spełnione są równości

$$AC = BD, \quad AD = BX \quad \text{oraz} \quad DX = 1.$$

Wyznacz długość odcinka CX.

Rozwiązanie

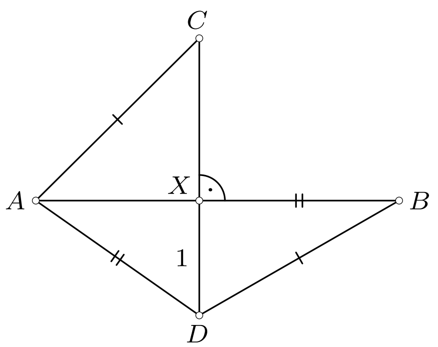
Odpowiedź: Odcinek CX ma długość $\sqrt{2}$.

Sposób I

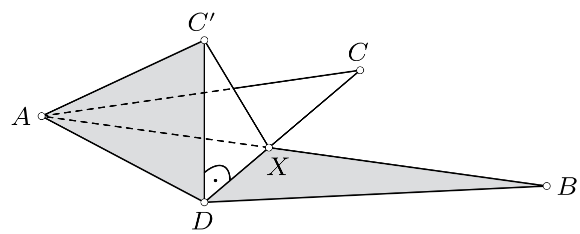
Stosując twierdzenie Pitagorasa kolejno do trójkątów prostokątnych ACX, ADX, BDX (rys. 1) oraz korzystając z danych w treści zadania równości, uzyskujemy

$$CX^2 = AC^2 - AX^2 = AC^2 - (AD^2 - DX^2) = BD^2 - BX^2 + DX^2 = 2 \cdot DX^2 = 2,$$

skąd $CX = \sqrt{2}$.



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Niech C' będzie punktem w przestrzeni leżącym „nad” punktem D w odległości 1, tzn. takim punktem, że $C'D = DX = 1$ oraz prosta $C'D$ jest prostopadła do płaszczyzny odcinków AB i CD (rys. 2). Wówczas trójkąt $C'DX$ jest połową kwadratu o boku 1, skąd $C'X = \sqrt{2}$.

Trójkąty prostokątne ADC' i BXD mają równe pary przyprostokątnych $AD = BX$ oraz $C'D = DX$, więc ich przeciwprostokątne także są równe, czyli $BD = AC'$. W konsekwencji $AC = AC'$ i trójkąty prostokątne AXC oraz AXC' są przystające, gdyż mają równe przeciwprostokątne oraz wspólną przyprostokątną AX. Wobec tego $CX = C'X = \sqrt{2}$.

---

2. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$ oraz jej dodatnie dzielniki a i b, które spełniają równość $a + b + ab = n$. Wykaż, że $a = b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro każda z liczb n, a oraz ab jest podzielna przez a, to także liczba $n - a - ab = b$ jest podzielna przez a. Analogicznie uzasadniamy, że liczba $n - b - ab = a$ jest podzielna przez b. Ponieważ liczby a oraz b są dodatnie, więc z poczynionych obserwacji wynika, że $a = b$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Sposób II

Przyjmijmy, że $n=ak$, gdzie $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą. Warunek zadania przybiera wówczas postać

$$a+b+ab=ka, \quad \text{czyli} \quad b(1+a)=a(k-1).$$

Liczby a oraz $1+a$ różnią się o 1, więc nie mają wspólnych dzielników różnych od 1. Wobec tego, skoro $b(1+a)$ jest liczbą podzielną przez a, to b jest liczbą podzielną przez a.

W pełni analogiczne rozumowanie pozwala uzasadnić, że a jest liczbą podzielną przez b. W konsekwencji $a=b$.

---

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 100$ pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Szukaną najmniejszą liczbą kolorów jest $n=25$.

Zauważmy, że gdyby pewne dwie liczby podzielne przez 4 zostały pomalowane tym samym kolorem, to ich suma byłaby liczbą podzielną przez 4, co przeczy warunkom zadania. Wobec tego każde dwie spośród liczb

$$4=4\cdot 1, \quad 8=4\cdot 2, \quad 12=4\cdot 3, \quad \ldots, \quad 100=4\cdot 25$$

zostały pomalowane różnymi kolorami. Stąd wniosek, że użyto *co najmniej* 25 kolorów.

Wskażemy kolorowanie liczb spełniające warunki zadania przy użyciu *dokładnie* 25 kolorów. W ten sposób wykażemy, że szukaną najmniejszą możliwą liczbą kolorów jest $n=25$.

Rozważmy dowolny zestaw 25 kolorów wśród których są czerwony i niebieski. Podzielmy wszystkie liczby całkowite od 1 do 100 na cztery zbiory w zależności od reszty przy dzieleniu przez 4. Niech R_0, R_1, R_2, R_3 oznaczają zbiory tych liczb od 1 do 100, które przy dzieleniu przez 4 dają odpowiednio resztę 0, 1, 2, 3, tzn.

$$R_0=\{4,8,12,16,\ldots,92,96,100\}, \quad R_1=\{1,5,9,13,\ldots,89,93,97\},$$
$$R_2=\{2,6,10,14,\ldots,90,94,98\}, \quad R_3=\{3,7,11,15,\ldots,91,95,99\}.$$

Każdą z 25 liczb ze zbioru R_0 malujemy innym kolorem. Podobnie każdą z 25 liczb ze zbioru R_2 malujemy innym kolorem. Z kolei wszystkie liczby ze zbioru R_1 malujemy na czerwono, a wszystkie liczby ze zbioru R_3 — na niebiesko.

Jeśli suma dwóch różnych składników, z których każdy jest liczbą całkowitą od 1 do 100, jest podzielna przez 4, to zachodzi jeden z następujących przypadków:

- obydwa składniki należą do zbioru R_0 — wówczas mają różne kolory;
- obydwa składniki należą do zbioru R_2 — wówczas mają różne kolory;
- jeden ze składników należy do zbioru R_1, a drugi należy do zbioru R_3 — wówczas jeden z nich jest czerwony, a drugi jest niebieski, więc również w tym przypadku składniki mają różne kolory.

Tym samym udowodniliśmy, że wprowadzone kolorowanie spełnia warunki zadania, co kończy rozwiązanie.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

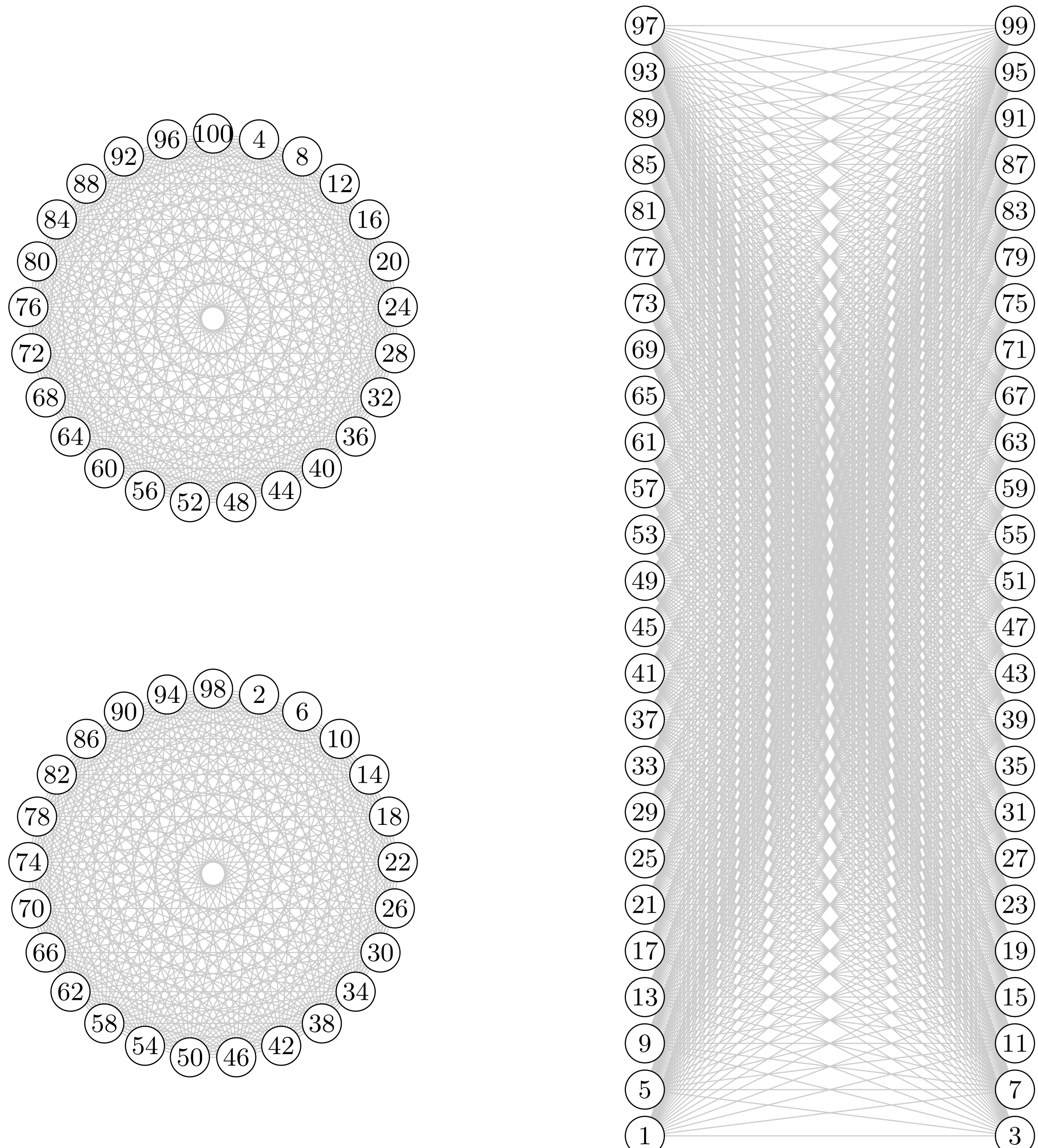
Ministerstwo Edukacji i Nauki

Uwaga

Warunki zadania oraz rozwiązanie można zilustrować w następujący sposób. Narysujmy 100 wierzchołków odpowiadających danym liczbom oraz połączmy krawędziami liczby o sumie podzielnej przez 4 (czyli takie, które mają zostać pomalowane różnymi kolorami). W efekcie otrzymamy *graf* przedstawiający wszystkie pary liczb, które powinny otrzymać różne kolory (rys. 3).

Graf składa się z trzech składowych: elementy zbioru R_0 połączone każdy z każdym, elementy zbioru R_2 połączone każdy z każdym oraz pozostałe elementy, przy czym każdy element zbioru R_1 jest połączony z każdym elementem zbioru R_3. Do pomalowania pierwszych dwóch składowych potrzeba 25 różnych kolorów, do pomalowania trzeciej wystarczą dowolne dwa z nich.

Minimalna liczba kolorów potrzebnych do pomalowania wierzchołków grafu tak, aby każda krawędź miała końce różnego koloru nazywa się *liczbą chromatyczną* tego grafu.



rys. 3

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle CDE = 90^\circ, \quad AC = AD \quad \text{oraz} \quad BD = BE.$$

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne są mniejsze od 180°.

Rozwiązanie

Komentarz

W prezentowanych rozwiązaniach przez $[\mathcal{F}]$ rozumiemy pole figury $\mathcal{F}$.

Sposób I

Oznaczmy przez K oraz L odpowiednio środki odcinków CD i DE (rys. 4). Niech ponadto a oznacza odległość punktu A od prostej DE, a b odległość punktu B od prostej CD.

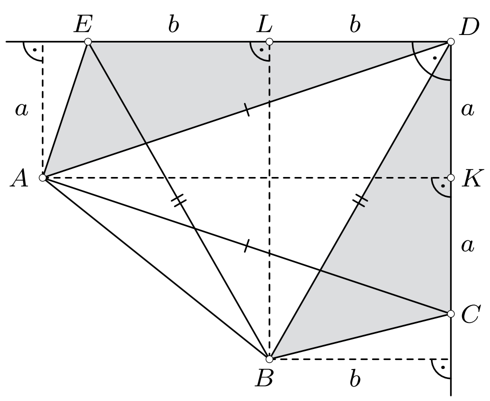
Zauważmy, że odcinek AK jest wysokością trójkąta równoramiennego ACD, wobec czego jest równoległy do prostej DE. W konsekwencji $a = DK = CK$. Podobnie mamy $b = DL = EL$.

Wobec tego

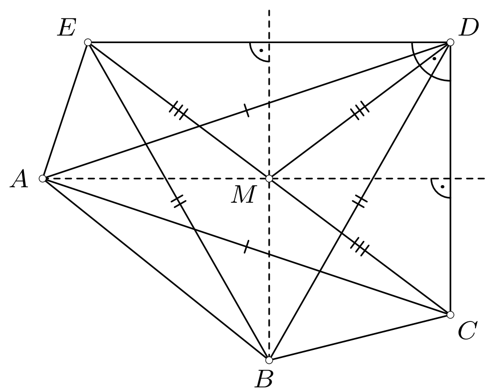
$$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab, \quad [ADE] = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab \quad \text{oraz} \quad [CDE] = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab,$$

skąd wniosek, że

$$[ABD] = [ABCDE] - [BCD] - [ADE] = [ABCDE] - 2ab = [ABCDE] - [CDE] = [ABCE].$$



rys. 4



rys. 5

Sposób II

Wykorzystamy następującą obserwację

Jeżeli proste XY oraz ZZ' są równoległe, to $[XYZ] = [XYZ']$.

Wynika ona bezpośrednio ze wzoru na pole trójkąta — trójkąty XYZ oraz XYZ' mają wspólną podstawę XY oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę: każda z nich jest bowiem równa odległości między prostymi XY oraz ZZ'.

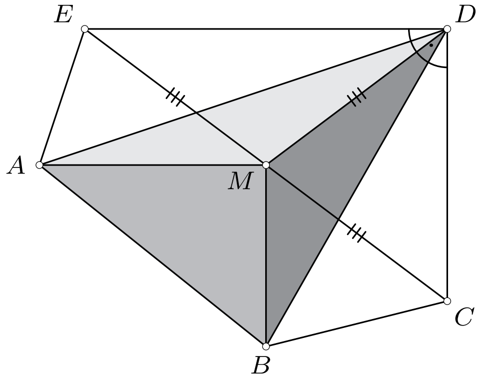
Oznaczmy przez M środek odcinka CE (rys. 5). Zauważmy, że M jest środkiem przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym CDE, wobec czego $MC = MD = ME$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

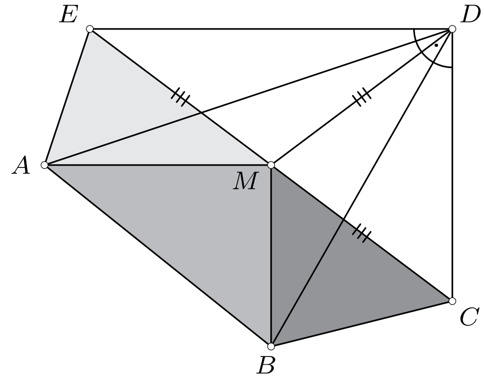
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Zauważmy, że skoro $AD = AC$ oraz $MD = MC$ to prosta AM jest prostopadła do odcinka CD. W konsekwencji, skoro $\sphericalangle CDE = 90°$, to proste AM oraz DE są równoległe. Wobec tego, zgodnie z przytoczoną wyżej obserwacją mamy równość $[AMD] = [AME]$.



rys. 6



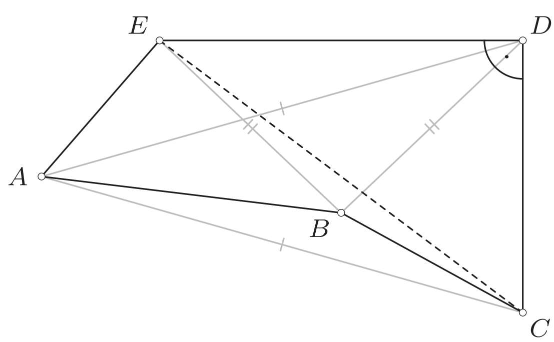
rys. 7

Analogicznie rozumując dochodzimy do wniosku, że proste BM oraz CD są równoległe i w konsekwencji $[BMD] = [BMC]$ (rys. 6 i 7). Pozostaje zauważyć, że

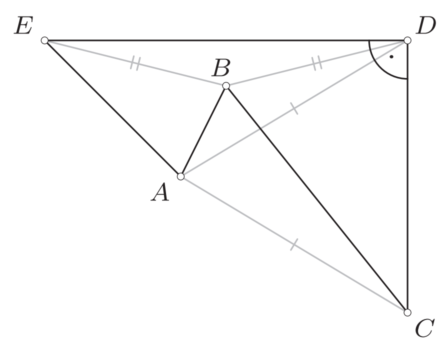
$$[ABD] = [ABM] + [AMD] + [BMD] = [ABM] + [AME] + [BMC] = [ABCE].$$

Uwaga

Teza zadania jest spełniona również dla *niewypukłych* pięciokątów $ABCDE$, o ile obydwa punkty A i B leżą po przeciwnej stronie prostej CE niż punkt D (rys. 8). W przeciwnym przypadku trudno mówić o polu czworokąta $ABCE$, gdyż odcinki AB i CE mogą się przecinać (rys. 9).



rys. 8



rys. 9

---

5. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą nieparzystą. Na prostej zaznaczono n punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest liczbą całkowitą. Okazało się, że każdy zaznaczony punkt ma parzystą sumę odległości od pozostałych $n-1$ zaznaczonych punktów. Wykaż, że odległość między każdymi dwoma zaznaczonymi punktami jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

Sposób I

Wybierzmy dowolne dwa zaznaczone punkty i nazwijmy je A oraz B. Przypuśćmy, że dana prosta ułożona jest poziomo i punkt A znajduje się na lewo od punktu B.

Niech L będzie dowolnym punktem danej prostej znajdującym się na lewo od punktu A, M — dowolnym punktem danej prostej znajdującym się pomiędzy A oraz B, a P — dowolnym punktem danej prostej znajdującym się na prawo od punktu B (rys. 10). Wówczas

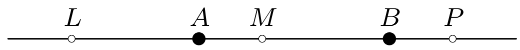
$$AL + BL = 2 \cdot AL + AB, \quad AM + BM = AB, \quad AP + BP = 2 \cdot BP + AB.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Przypuśćmy, że na lewo od A znajduje się ℓ zaznaczonych punktów: L_1, L_2, ..., L_ℓ, pomiędzy punktami A i B znajduje się m zaznaczonych punktów: M_1, M_2, ..., M_m, a na prawo od B znajduje się p zaznaczonych punktów: P_1, P_2, ..., P_p (niektóre spośród liczb ℓ, m, p mogą być równe zero). Wówczas $\ell+m+p+2=n$ to liczba wszystkich zaznaczonych punktów.



rys. 10

Z warunków zadania wynika, że liczby

$$AL_1+AL_2+\ldots+AL_\ell+AM_1+AM_2+\ldots+AM_m+AB+AP_1+AP_2+\ldots+AP_p$$

oraz

$$BL_1+BL_2+\ldots+BL_\ell+AB+BM_1+BM_2+\ldots+BM_m+BP_1+BP_2+\ldots+BP_p$$

są parzyste. W takim razie ich suma jest również liczbą parzystą, a w myśl poczynionych wcześniej obserwacji jest ona równa

$$2\cdot(AL_1+AL_2+\ldots+AL_\ell)+\ell\cdot AB+(m+2)\cdot AB+2\cdot(BP_1+BP_2+\ldots+BP_p)+p\cdot AB.$$

To oznacza, że liczba $(\ell+m+2+p)\cdot AB=n\cdot AB$ jest parzysta, a zatem, skoro n jest liczbą nieparzystą, długość AB jest parzysta, co było do udowodnienia.

Uwaga 1.

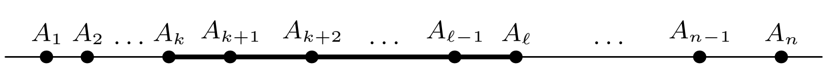
Jeśli zamiast prostej w treści zadania rozważymy płaszczyznę, to postulowana własność nie musi być spełniona. Jeżeli zaznaczymy trzy punkty w wierzchołkach trójkąta o wszystkich bokach nieparzystej długości (np. trójkąta równobocznego o boku 1), to każdy zaznaczony punkt będzie miał parzystą sumę odległości od pozostałych, a przy tym odległość każdej pary zaznaczonych punktów będzie liczbą nieparzystą.

Sposób II

Nazwijmy zaznaczone punkty A_1, A_2, ..., A_n w taki sposób, że położone są one na prostej w tej właśnie kolejności. Zauważmy, że do rozwiązania zadania wystarczy udowodnić, że wszystkie odcinki A_kA_{k+1} dla $k=1,2,\ldots,n-1$ mają długość parzystą. Istotnie, każda odległość między dwoma zaznaczonymi punktami to suma długości pewnych spośród tych odcinków. Konkretnie: dla dowolnych liczb całkowitych k, ℓ spełniających nierówności $1\leqslant k<\ell\leqslant n$ mamy (rys. 11)

$$A_kA_\ell=A_kA_{k+1}+A_{k+1}A_{k+2}+\ldots+A_{\ell-1}A_\ell.$$

Jeśli wszystkie składniki sumy po prawej stronie powyższej równości są parzyste, to także A_kA_ℓ jest liczbą parzystą.



rys. 11

Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą, dla której $1\leqslant k\leqslant n-1$ oraz niech $a=A_kA_{k+1}$. Zauważmy, że suma odległości d_k punktu A_k od wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów jest równa

$$d_k=A_1A_k+\ldots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}+A_kA_{k+2}+\ldots+A_kA_n.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Z kolei suma odległości d_{k+1} punktu A_{k+1} od wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów jest równa

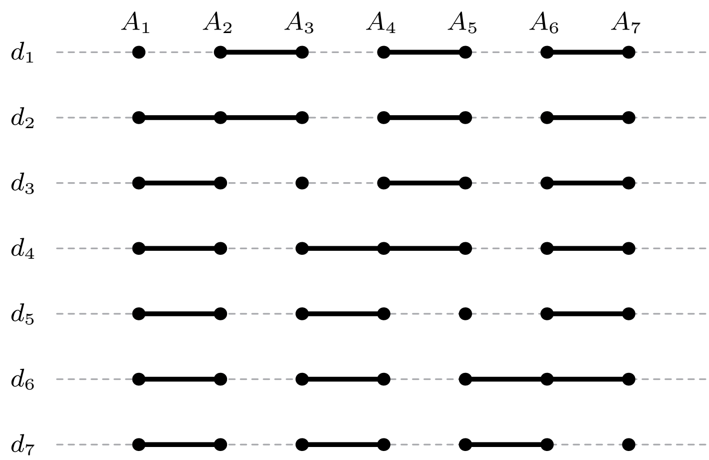
$$\begin{aligned} d_{k+1} &= A_1A_{k+1} + \ldots + A_{k-1}A_{k+1} + A_kA_{k+1} + A_{k+1}A_{k+2} + \ldots + A_{k+1}A_n = \\ &= (A_1A_k + a) + \ldots + (A_{k-1}A_k + a) + A_kA_{k+1} + (A_kA_{k+2} - a) + \ldots + (A_kA_n - a) = \\ &= d_k + (k-1)\cdot a - (n-k-1)\cdot a = d_k + (2k-n)\cdot a. \end{aligned}$$

Z treści zadania wynika, że d_k oraz d_{k+1} to liczby parzyste, wobec czego różnica tych liczb $d_{k+1} - d_k = (2k-n)\cdot a$ również jest liczbą parzystą. Ponieważ $2k-n$ jest liczbą nieparzystą, więc wynika z tego, że $a = A_kA_{k+1}$ jest liczbą parzystą. To kończy rozwiązanie, gdyż liczbę k wybraliśmy dowolnie.

Uwaga 2.

Każdy składnik sumy d_k w zaprezentowanym rozwiązaniu można rozbić na składniki postaci A_mA_{m+1} (czyli długości odcinków łączących pary kolejnych wyróżnionych punktów). Nazwijmy każdy taki składnik *cegiełką*.

Jeżeli pewna cegiełka A_mA_{m+1} występuje w sumie d_k parzystą liczbę razy, to suma tych cegiełek jest parzysta. Jeśli zaś pewna cegiełka A_mA_{m+1} występuje w sumie d_k nieparzystą liczbę razy, to suma tych cegiełek ma tę samą parzystość, co pojedyncza cegiełka A_mA_{m+1}. Innymi słowy, parzystość sumy d_k jest taka sama, jak parzystość sumy cegiełek występujących w niej nieparzystą liczbę razy.



rys. 12

Cegiełki występujące nieparzystą liczbę razy w sumach d_k dla $k = 1, 2, \ldots, n$ zilustrowane są jako pogrubione odcinki na rysunku 12 (przyjmujemy $n = 7$). Można zaobserwować, że d_k oraz d_{k+1} różnią się jedynie parzystością liczby wystąpień cegiełki A_kA_{k+1} — skoro więc obie liczby d_k i d_{k+1} są parzyste, to A_kA_{k+1} również. Poprzedni sposób rozwiązania zawiera formalne uzasadnienie tej obserwacji.

Komentarz

W kolejnych sposobach rozwiązania tego zadania wygodnie jest utożsamiać zaznaczone punkty z liczbami całkowitymi. Takiego utożsamienia można dokonać na przykład w następujący sposób.

Wybierzmy dowolny spośród zaznaczonych punktów i potraktujmy daną prostą jako oś liczbową, na której wybrany punkt ma wartość całkowitą. Ponieważ wszystkie pozostałe zaznaczone punkty są w całkowitej odległości od wybranego punktu, więc na rozważanej osi również odpowiadają im wartości całkowite. Wówczas odległość między punktami a i b jest równa liczbie $|a-b|$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Sposób III

Niech A będzie zbiorem tych zaznaczonych punktów, którym odpowiadają liczby parzyste, a B — zbiorem tych zaznaczonych punktów, którym odpowiadają liczby nieparzyste. Niech ponadto $|A|$ oraz $|B|$ oznaczają liczby elementów odpowiednio zbiorów A oraz B.

Ponieważ $|A|+|B|=n$ jest liczbą nieparzystą, więc jedna z liczb $|A|$, $|B|$ jest parzysta, a druga — nieparzysta. Załóżmy, że liczba $|A|$ jest parzysta, a liczba $|B|$ jest nieparzysta.

Przypuśćmy, że $|A|\neq 0$ i wybierzmy dowolny punkt a ze zbioru A. Jego odległość od każdego punktu z A jest liczbą parzystą, a jego odległość od każdego punktu z B jest liczbą nieparzystą. Wobec tego w sumie odległości punktu a od wszystkich pozostałych punktów występuje $|B|$ nieparzystych składników, czyli nieparzyście wiele. To zaś oznacza, że suma odległości a od pozostałych zaznaczonych punktów jest nieparzysta, wbrew założeniu zadania. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $|A|=0$, czyli wszystkie zaznaczone punkty znajdują się w zbiorze B. Innymi słowy — wszystkim zaznaczonym punktom odpowiadają liczby nieparzyste, a zatem odległość między dowolnymi dwoma z nich jest parzysta.

Rozumowanie w przypadku, gdy $|A|$ jest liczbą nieparzystą, a $|B|$ jest liczbą parzystą jest analogiczne i prowadzi do wniosku, że $|B|=0$, czyli wszystkim punktom odpowiadają liczby parzyste.

Uwaga 3.

Rozumowanie podobne do powyższego można alternatywnie zaprezentować następująco. Zauważmy, że przesunięcie dowolnego zaznaczonego punktu o 2 (w dowolną stronę) nie zmienia *parzystości* żadnej z odległości między tym punktem a jakimkolwiek innym zaznaczonym punktem. Wobec tego wszystkie zaznaczone punkty można „poprzesuwać” w taki sposób, aby $|A|$ z nich znalazło się w punkcie odpowiadającym liczbie 0, a $|B|$ z nich — w punkcie odpowiadającym liczbie 1. Gdyby $|A|\geqslant 1$ oraz $|B|\geqslant 1$, to suma odległości dowolnego punktu z A od wszystkich pozostałych byłaby równa $|B|$, a suma odległości dowolnego punktu z B od wszystkich pozostałych byłaby równa $|A|$. W konsekwencji obie liczby $|A|$ oraz $|B|$ byłyby parzyste, co przeczy założeniu, że $|A|+|B|=n$. To oznacza, że $|A|=0$ lub $|B|=0$.

Sposób IV

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację:

Jeżeli liczby a_1, a_2, ..., a_n są całkowite, to liczby

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \quad \textit{oraz} \quad |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$$

są tej samej parzystości, tzn. obie są nieparzyste lub obie są parzyste.

Krótkie uzasadnienie tej własności jest następujące: parzystość sumy liczb całkowitych zależy tylko od liczby jej nieparzystych składników, a pośród liczb a_1, a_2, ..., a_n jest tyle samo liczb nieparzystych, co pośród liczb $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_n|$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Niech x_1, x_2, ..., x_n będą liczbami całkowitymi odpowiadającymi wybranym punktom, a $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$ — sumą tych liczb. Z treści zadania wynika, że dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ liczba

$$|x_1-x_i|+|x_2-x_i|+\ldots+|x_n-x_i|,$$

czyli suma odległości punktu x_i od wszystkich zaznaczonych punktów (wliczając zerową odległość $|x_i-x_i|$ od samego siebie), jest parzysta. Wykorzystując przytoczoną obserwację, wnosimy, że również suma

$$(x_1-x_i)+(x_2-x_i)+\ldots+(x_n-x_i)=S-nx_i$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

jest parzysta. To oznacza, że liczba nx_i jest tej samej parzystości, co liczba S i w konsekwencji — skoro liczba n jest nieparzysta — liczba x_i jest tej samej parzystości, co liczba S.

Wykazaliśmy, że dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ liczba x_i ma tę samą parzystość, co liczba S, skąd wynika, że wszystkie liczby x_1, x_2, ..., x_n są tej samej parzystości (tzn. wszystkie są parzyste lub wszystkie są nieparzyste). To zaś oznacza, że odległość pomiędzy dowolnymi dwiema z nich jest liczbą parzystą, co należało udowodnić.

Sposób V

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację:

Jeżeli liczby a, b, c są całkowite, to liczby

$$|a-c|-|b-c| \quad \textit{oraz} \quad |a-b|$$

są tej samej parzystości, tzn. obie są nieparzyste lub obie są parzyste.

Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że obłożenie liczby wartością bezwzględną nie zmienia jej parzystości. W konsekwencji liczba $|a-c|$ jest tej samej parzystości, co liczba $a-c=(a-b)+(b-c)$, czyli tej samej parzystości, co $|a-b|+|b-c|$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Niech c_1, c_2, ..., c_n będą liczbami całkowitymi odpowiadającymi wszystkim zaznaczonym punktom. Wyróżnijmy dowolne dwie spośród nich: a i b. Z treści zadania wynika, że

$$|a-c_1|+|a-c_2|+\ldots+|a-c_n| \quad \text{oraz} \quad |b-c_1|+|b-c_2|+\ldots+|b-c_n|$$

to liczby parzyste, więc ich różnica

$$(|a-c_1|-|b-c_1|)+(|a-c_2|-|b-c_2|)+\ldots+(|a-c_n|-|b-c_n|)$$

również jest liczbą parzystą. Na mocy poczynionej obserwacji, każdy z n składników w nawiasach jest tej samej parzystości co $|a-b|$, wobec czego cała suma jest tej samej parzystości, co $n\cdot|a-b|$. Skoro ta liczba jest parzysta, a liczba n jest nieparzysta, to wynika z tego, że $|a-b|$ jest liczbą parzystą. To kończy rozwiązanie, gdyż a i b wybraliśmy dowolnie spośród zaznaczonych punktów.

Sposób VI

Każdy z zaznaczonych punktów utożsammy z liczbą całkowitą. Dla *dowolnej* liczby całkowitej x (niekoniecznie odpowiadającej pewnemu zaznaczonemu punktowi) oznaczmy przez $d(x)$ sumę odległości x od wszystkich zaznaczonych punktów. W szczególności jeśli x odpowiada jednemu z zaznaczonych punktów, to na mocy założeń zadania $d(x)$ jest liczbą parzystą.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $d(x+1)-d(x)$ jest nieparzysta. Rzeczywiście: niech ℓ będzie liczbą zaznaczonych punktów nie większych od x, a $p=n-\ell$ — liczbą zaznaczonych punktów nie mniejszych od $x+1$. Wówczas

$$d(x+1)-d(x)=\ell-p=2\ell-n,$$

gdyż $x+1$ jest dalej o jeden niż x od ℓ zaznaczonych punktów oraz bliżej o jeden niż x od p zaznaczonych punktów. Liczba $2\ell-n$ jest nieparzysta, co kończy dowód postulowanej własności.

Udowodniony fakt oznacza, że parzystość liczby $d(x)$ zmienia się wraz z parzystością liczby x. W szczególności jeśli liczby $d(x)$ oraz $d(y)$ są tej samej parzystości, to również liczby x oraz y są tej samej parzystości. To zaś oznacza, że wszystkie zaznaczone punkty są tej samej parzystości (bo dla każdego zaznaczonego punktu x wartość $d(x)$ jest parzysta).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki