III Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

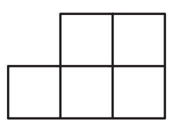
Individual contest

(Tuesday, 13 May 2014)

1. Na płaszczyźnie dane są okręgi k i l przecinające się w punktach C i D, przy czym okrąg k przechodzi przez środek L okręgu l. Prosta przechodząca przez punkt D przecina okręgi k i l po raz drugi odpowiednio w punktach A i B w taki sposób, że D jest punktem wewnętrznym odcinka AB. Wykaż, że $AB = AC$.

2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie $a+b+4=4\sqrt{a\sqrt{b}}$.

3. Mamy do dyspozycji 10 jednakowych płytek takich, jak na rysunku. Płytki można obracać, ale nie odwracać na drugą stronę. Tablicę o wymiarach 7×7 należy pokryć tymi płytkami w taki sposób, aby dokładnie jedno pole zostało pokryte przez dwie płytki, a wszystkie pozostałe pola — przez jedną płytkę. Wyznacz wszystkie pola, które mogą zostać pokryte dwiema płytkami.



4. Liczba a_n jest utworzona przez napisanie po kolei, bez odstępów, liczb $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (na przykład $a_{11} = 1234567891011$). Znajdź najmniejszą taką liczbę t, że $11 \mid a_t$.

5. Kwadrat podzielono prostymi na n wielokątów. Wyznacz największą możliwą sumę miar kątów wewnętrznych wszystkich tych wielokątów.

(*version: Polish*)

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego