III Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody indywidualne (13 maja 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Na płaszczyźnie dane są okręgi k i l przecinające się w punktach C i D, przy czym okrąg k przechodzi przez środek L okręgu l. Prosta przechodząca przez punkt D przecina okręgi k i l po raz drugi odpowiednio w punktach A i B w taki sposób, że D jest punktem wewnętrznym odcinka AB. Wykaż, że $AB = AC$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że w okręgu l kąt środkowy DLC i kąt wpisany ABC są oparte na tym samym łuku CD, a zatem $\sphericalangle DLC = 2\sphericalangle ABC$. Ponadto czworokąt $ADLC$ jest wpisany w okrąg k, więc $\sphericalangle DLC = 180^\circ - \sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. Wobec tego trójkat ABC jest równoramienny i $AB = AC$.

---

2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie $a+b+4 = 4\sqrt{a\sqrt{b}}$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że muszą zachodzić nierówności $b \geqslant 0$ oraz $a\sqrt{b} \geqslant 0$. Przypuśćmy, że $b > 0$. Wówczas z nierówności $a\sqrt{b} \geqslant 0$ wynika, że $a \geqslant 0$. Wobec tego zadane równanie możemy przekształcić następująco

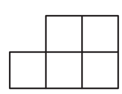
$$a - 4\sqrt{a\sqrt{b}} + 4\sqrt{b} + b - 4\sqrt{b} + 4 = 0,$$
$$(\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt{b} - 2)^2 = 0.$$

Stąd wynika, że $\sqrt{b} = 2$, czyli $b = 4$ oraz $\sqrt{a} = 2\sqrt[4]{b} = 2\sqrt{2}$, czyli $a = 8$.

Jeżeli $b = 0$ to równanie przybiera postać $a + 4 = 0$, czyli $a = -4$. Bezpośrednio sprawdzamy, że znalezione pary $(a,b) = (\mathbf{-4}, \mathbf{0})$ oraz $(a,b) = (\mathbf{8}, \mathbf{4})$ spełniają warunki zadania.

---

3. Mamy do dyspozycji 10 jednakowych płytek takich, jak na rysunku. Płytki można obracać, ale nie odwracać na drugą stronę. Tablicę o wymiarach 7×7 należy pokryć tymi płytkami w taki sposób, aby dokładnie jedno pole zostało pokryte przez dwie płytki, a wszystkie pozostałe pola — przez jedną płytkę. Wyznacz wszystkie pola, które mogą zostać pokryte dwiema płytkami.



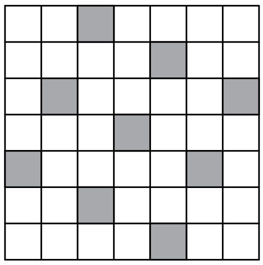
Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że jedynym polem o zadanej własności jest centralne pole tablicy.

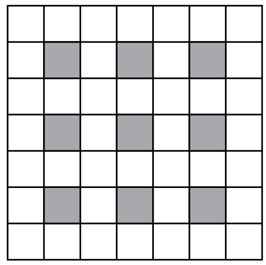
Wyróżnijmy niektóre pola tablicy, jak pokazano na rysunku (rys. 1). Zauważmy, że niezależnie od tego, jak ułożymy pojedynczą płytkę, zawsze pokrywa ona *dokładnie* jedno wyróżnione pole. Płytek jest 10, a wyróżnionych pól tylko 9, więc polem pokrytym dwiema płytkami musi być jedno z pól wyróżnionych.

Jeśli wyróżnimy inne 9 pól (rys. 2), będziemy mogli przeprowadzić podobne rozumowanie. Każda płytka pokrywa teraz *co najmniej* jedno wyróżnione pole, więc aby dane pokrycie było możliwe, polem pokrytym dwiema płytkami i tym razem musi być jedno z pól wyróżnionych.

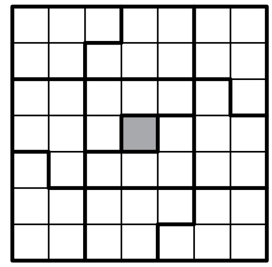
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Jedynym polem, które wyróżniliśmy w obu przypadkach, jest centralne pole tablicy. Pozostaje wskazać przykład takiego ułożenia płytek, w którym pole to jest pokryte przez dwie płytki (rys. 3).

---

4. Liczba a_n jest utworzona przez napisanie po kolei, bez odstępów, liczb $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (na przykład $a_{11} = 1234567891011$). Znajdź najmniejszą taką liczbę t, że $11 \mid a_t$.

Szkic rozwiązania

Rozważania wystarczy ograniczyć do reszt liczb a_n z dzielenia przez 11.

Dla $1 \leqslant i \leqslant 8$ spełniona jest zależność

$$a_{i+1} = 10a_i + (i+1) = 11a_i - a_i + (i+1) \equiv -a_i + (i+1) \pmod{11}.$$

Stąd wniosek, że reszty z dzielenia przez 11 liczb $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_9$ wynoszą kolejno

$$1,\ -1+2=1,\ -1+3=2,\ -2+4=2,\ -2+5=3,\ \ldots,\ -4+9=5.$$

Żadna z tych reszt nie jest równa 0.

Dla $9 \leqslant i \leqslant 98$ spełniona jest podobna zależność

$$a_{i+1} = 100a_i + (i+1) = 99a_i + a_i + (i+1) \equiv a_i + (i+1) \pmod{11}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że reszty z dzielenia liczb $a_{10},\ a_{11},\ \ldots,\ a_{20},\ a_{21}$ przez 11 wynoszą odpowiednio 4, 4, 5, 7, 10, 3, 8, 3, 10, 7, 5, 4. Zauważmy, że $a_{10} \equiv 4 \equiv a_{21} \pmod{11}$. Ponadto, jeśli $a_i \equiv a_{i+11} \pmod{11}$, to również

$$a_{i+1} \equiv a_i + i + 1 \equiv a_{i+11} + i + 12 \equiv a_{i+12} \pmod{11}.$$

Korzystając z powyższej własności kolejno dla $i = 10, 11, \ldots, 87$, uzyskujemy

$$a_{10} \equiv a_{21} \equiv a_{32} \equiv \ldots \equiv a_{98} \equiv 4 \pmod{11},$$

$$a_{11} \equiv a_{22} \equiv a_{33} \equiv \ldots \equiv a_{99} \equiv 4 \pmod{11},$$

$$a_{12} \equiv a_{23} \equiv a_{34} \equiv \ldots \equiv a_{89} \equiv 5 \pmod{11},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{19} \equiv a_{30} \equiv a_{41} \equiv \ldots \equiv a_{96} \equiv 7 \pmod{11},$$

$$a_{20} \equiv a_{31} \equiv a_{42} \equiv \ldots \equiv a_{97} \equiv 5 \pmod{11}.$$

Żadna z liczb a_i dla $10 \leqslant i \leqslant 99$ nie jest podzielna przez 11, gdyż, jak sprawdziliśmy wcześniej, żadna z liczb $a_{10},\ a_{11},\ \ldots,\ a_{20}$ nie jest podzielna przez 11.

W przypadku, gdy $99 \leqslant i \leqslant 998$, liczby a_i są powiązane zależnością

$$a_{i+1} = 1000a_i + (i+1) = 11 \cdot 91a_i - a_i + (i+1) \equiv -a_i + (i+1) \pmod{11}.$$

Bezpośrednio wyznaczamy wartości reszt z dzielenia liczb $a_{100},\ a_{101},\ \ldots$ przez 11, uzyskując kolejno 8, 5, 9, 6, 10, 7, 0. Stąd wniosek, że najmniejszą liczbą t taką, że $11 \mid a_t$ jest $t = \mathbf{106}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. Kwadrat został podzielony prostymi na n wielokątów. Wyznacz największą możliwą sumę miar kątów wewnętrznych wszystkich tych wielokątów.

Szkic rozwiązania

Odcinkiem *tnącym* nazwiemy ten fragment każdej z prostych dzielących kwadrat na n wielokątów, który jest zawarty wewnątrz lub na brzegu kwadratu. Każdy punkt wspólny co najmniej jednego odcinka tnącego z brzegiem kwadratu nazwiemy *wierzchołkiem brzegowym.* Analogicznie punkt wspólny co najmniej dwóch odcinków tnących, znajdujący się wewnątrz kwadratu, nazwiemy *wierzchołkiem wewnętrznym.*

Zauważmy, że każdy wierzchołek dowolnego wielokąta otrzymanego z podziału jest brzegowy, wewnętrzny lub jest wierzchołkiem kwadratu. Suma miar tych kątów wewnętrznych wielokątów otrzymanych z podziału, które leżą wokół pewnego wierzchołka wewnętrznego jest zawsze równa 360°, wokół wierzchołka brzegowego — 180°, a wokół wierzchołka kwadratu — 90°.

Udowodnimy, że największa możliwa wartość szukanej sumy wynosi $n\cdot 360^\circ$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem n. Dla $n=1$ teza oczywiście zachodzi. Rozważmy podział kwadratu prostymi na $n\geqslant 2$ wielokątów i załóżmy, że dla każdej liczby naturalnej $k<n$ maksymalna suma kątów przy podziale kwadratu na k wielokątów wynosi $k\cdot 360^\circ$.

Usuńmy dowolny odcinek tnący l oraz przypuśćmy, że liczba wielokątów zmniejszyła się o k. Otrzymamy w ten sposób podział kwadratu na $n-k$ wielokątów. W myśl założenia indukcyjnego, suma kątów wewnętrznych tych wielokątów wynosi co najwyżej $(n-k)\cdot 360^\circ$.

Po przywróceniu do podziału odcinka l liczba wierzchołków wewnętrznych wzrośnie o co najwyżej $k-1$. Rzeczywiście, odcinek l musi zawierać dokładnie $k-1$ wierzchołków wewnętrznych, ale niektóre z nich mogły być wierzchołkami wewnętrznymi przed przywróceniem l.

Ponadto po dodaniu l liczba wierzchołków brzegowych wzrośnie o co najwyżej 2. Odcinek l może bowiem przechodzić przez punkty, które już wcześniej były wierzchołkami brzegowymi albo przez wierzchołki kwadratu.

Z ostatnich dwóch akapitów płynie wniosek, że przywrócenie odcinka l zwiększy szukaną sumę miar kątów wewnętrznych (równą dotychczas co najwyżej $(n-k)\cdot 360^\circ$) o co najwyżej $(k-1)\cdot 360^\circ+2\cdot 180^\circ$. W takim razie dla wyjściowego podziału kwadratu na n wielokątów wartość omawianej sumy jest nie większa od

$$(n-k)\cdot 360^\circ+(k-1)\cdot 360^\circ+2\cdot 180^\circ=n\cdot 360^\circ.$$

Pozostaje wskazać podział kwadratu na n wielokątów, który realizuje wartość $n\cdot 360^\circ$. Wystarczy w tym celu podzielić kwadrat przy użyciu $n-1$ prostych równoległych na n prostokątów. To kończy dowód indukcyjny.