V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
Zawody stopnia trzeciego
(20 marca 2010 r.)

Szkice rozwiązań

---

1. Dane są takie liczby całkowite $a,b,c>1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc-1$ jest złożona.

Rozwiązanie
Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$. Wówczas każda z liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$ jest podzielna przez d, a zatem istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których $a-1=dx$, $b-1=dy$, $c-1=dz$. Stąd otrzymujemy

$$abc-1=(dx+1)(dy+1)(dz+1)-1=d^3xyz+d^2(xy+yz+zx)+d(x+y+z)=$$
$$=d(d^2xyz+d(xy+yz+zx)+x+y+z),$$

co oznacza, że liczba $abc-1$ jest podzielna przez d.
Ponadto $d>1$ oraz $d^2xyz+d(xy+yz+zx)+x+y+z>1$. Wobec tego liczba $abc-1$ jest złożona.

---

2. Na tablicy napisano skończenie wiele (i więcej niż jedną) różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb została napisana także ich suma. Jakie liczby napisano na tablicy? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie
Przypuśćmy, że wśród napisanych liczb są co najmniej dwie liczby dodatnie i niech a oznacza największą liczbę dodatnią napisaną na tablicy. Jeśli b oznacza jakąkolwiek inną napisaną liczbę dodatnią, to zgodnie z warunkami zadania napisana została także liczba $a+b$, która jest większa od a. Stąd wniosek, że na tablicy może widnieć co najwyżej jedna liczba dodatnia.
Analogicznie dowodzimy, że wśród napisanych liczb jest co najwyżej jedna liczba ujemna. Wobec tego na tablicy musiały zostać napisane co najwyżej trzy liczby: dodatnia, ujemna, zero.
Przyjmijmy więc, że na tablicy zostały napisane dokładnie dwie liczby: x oraz y. Wówczas liczba $x+y$ musi być równa x lub y, co oznacza, że jedna z tych liczb równa się 0.
Bezpośrednio sprawdzamy, że jeśli na tablicy napisano dowolną liczbę rzeczywistą $x\neq 0$ oraz liczbę 0, to warunki zadania są spełnione.
Przyjmijmy z kolei, że na tablicy napisano dokładnie trzy liczby: x, y, z. Wówczas jedna z nich, np. x musi być równa 0. Zgodnie z warunkami zadania liczba $y+z$ musi widnieć na tablicy. A ponieważ $y,z\neq 0$, więc liczba $y+z$ jest różna od y oraz z. Stąd wniosek, że $y+z=0$, czyli $z=-y$.
Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że jeśli na tablicy napisano dowolną liczbę rzeczywistą $y\neq 0$, liczbę 0 oraz liczbę $-y$, to warunki zadania są spełnione.
Odpowiedź: Na tablicy napisano dwie liczby $(x,0)$ lub trzy liczby $(y,0,-y)$, gdzie $x,y\neq 0$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

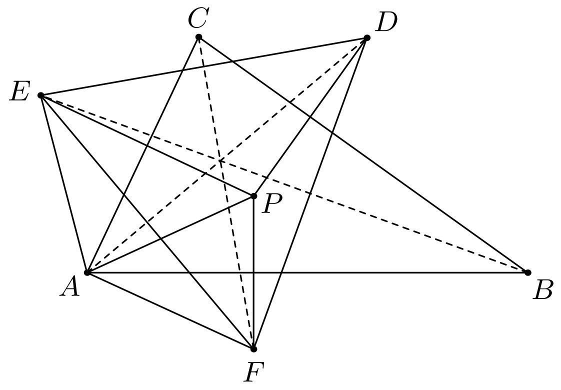
---

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Punkty P i E są symetryczne względem prostej AC, a więc $AE = AP$. Podobnie zauważamy, że $AP = AF$. Wobec tego $AE = AF$. Ponadto $ED = DF$. Stąd wynika, że prosta AD jest symetralną odcinka EF (gdyż czworokąt $AFDE$ jest deltoidem).

Analogiczne dowodzimy, że proste BE i CF są odpowiednio symetralnymi odcinków FD i DE. Zatem proste AD, BE i CF są symetralnymi boków trójkąta DEF, a więc przecinają się w jednym punkcie (będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF).



rys. 1

4. Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a, b, dla których

$$0 \leqslant \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_5$ będą danymi liczbami dodatnimi. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_5$. Niech ponadto

$$y_i = \frac{1}{1+x_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Wówczas $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_5$ oraz liczby te należą do otwartego przedziału $(0,1)$. Teza zadania sprowadza się więc do wykazania, że różnica między dwiema spośród liczb $y_1, y_2, \ldots, y_5$ jest nieujemna i jednocześnie mniejsza od $1/4$.

Przypuśćmy, że warunek ten nie jest spełniony. Wówczas

$$y_1 - y_2 \geqslant \frac{1}{4}, \quad y_2 - y_3 \geqslant \frac{1}{4}, \quad y_3 - y_4 \geqslant \frac{1}{4}, \quad y_4 - y_5 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Dodając stronami te nierówności uzyskujemy $y_1 - y_5 \geqslant 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczby y_1 oraz y_5 należą do przedziału otwartego $(0,1)$, a stąd wynika, że $y_1 - y_5 < 1$. Wobec tego dla pewnej liczby k spełnione są nierówności $0 \leqslant y_k - y_{k+1} < \frac{1}{4}$, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Taki wielościan istnieje.

Rozpatrzmy graniastosłup prawidłowy o podstawach $A_1A_2\ldots A_{99}$ oraz $B_1B_2\ldots B_{99}$ i krawędziach bocznych $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{99}B_{99}$. Następnie weźmy pod uwagę płaszczyznę, która przechodzi przez punkty A_1 i A_2 oraz przecina krawędzie $A_3B_3, A_4B_4, \ldots, A_{99}B_{99}$. Płaszczyzna ta rozcina dany graniastosłup na dwa wielościany, z których jeden — ten który zawiera ścianę $A_1A_2\ldots A_{99}$ — spełnia warunki zadania. Posiada on dokładnie 100 ścian, ścianę będącą 99-kątem oraz w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie.