VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(17 marca 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których liczby $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$. Wówczas $x=a-\sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b=(a-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=(1-2a)\sqrt{3}+a^2+3, \quad \text{czyli} \quad (1-2a)\sqrt{3}=b-a^2-3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1-2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3}=\frac{b-a^2-3}{1-2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1-2a=0$. Wobec tego $a=\frac{1}{2}$, czyli $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania, jest to jedyna liczba o żądanej własności.

---

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD. Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że jeżeli $KP=LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Ponieważ punkty L i N są środkami odpowiednio boków AD i CD trójkąta ACD, więc $LN=\frac{1}{2}AC$ oraz prosta LN jest równoległa do prostej AC. Analogicznie wykazujemy, że $MK=\frac{1}{2}AC$ oraz prosta MK jest równoległa do prostej AC.

Wobec tego $LN=MK$, a ponadto proste LN i MK są równoległe. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QLN=\sphericalangle PKM$, jako kąty naprzemianległe. Zatem trójkąty MKP i NLQ są przystające (cecha bok-kąt-bok). Stąd wniosek, że $\sphericalangle KPM=\sphericalangle LQN$, czyli proste MP i NQ są równoległe. Wobec tego proste AB i CD również są równoległe.

---

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Udowodnij, że

$$d\geqslant\sqrt{a+b}.$$

Szkic rozwiązania

Niech x, y będą dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których $a=dx$, $b=dy$. Ponieważ d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b, więc liczby x i y są względnie pierwsze.

Skoro iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$, to istnieje dodatnia liczba całkowita z taka, że $(a+b)\cdot z=ab$. Stąd otrzymujemy

$$d(x+y)\cdot z=d^2xy, \quad \text{czyli} \quad (x+y)\cdot z=dxy.$$

To oznacza, że liczba dxy jest podzielna przez $x+y$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczby $x+y$ i x są względnie pierwsze. Podobnie liczby $x+y$ i y. Wobec tego z podzielności $x+y \mid dxy$ wynika, że $x+y \mid d$. Stąd wniosek, że $d \geqslant x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2 \geqslant a+b$, czyli $d \geqslant \sqrt{a+b}$.

---

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n+2}$$

na n-tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy liczbę $\sqrt{100^n+2}$ przez a. Udowodnimy, że w zapisie dziesiętnym liczby a, na *każdym* miejscu od pierwszego do n-tego po przecinku, jest cyfra 0. W tym celu wskażemy taką dodatnią liczbę całkowitą k, że $k < a < k + \frac{1}{10^n}$.

Zauważmy, że $a = \sqrt{100^n+2} > \sqrt{100^n}$, czyli $a > 10^n$. Z drugiej strony

$$a^2 = 100^n + 2 < 100^n + 2 + \frac{1}{100^n} = \left(10^n + \frac{1}{10^n}\right)^2, \quad \text{a zatem} \quad a < 10^n + \frac{1}{10^n}.$$

Podsumowując, $10^n < a < 10^n + \dfrac{1}{10^n}$, co kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC = a$, $AD = b$. Na krawędziach AB, AC, DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K, L, M, N, że

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC} = \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{skąd} \quad KL = BC \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN, NM, MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego