X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia

(25 kwietnia 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że jeżeli $n \geqslant 6$ jest liczbą parzystą, to $n-2$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Stąd otrzymujemy przedstawienie $n=2+(n-2)$ liczby n jako sumy liczby pierwszej i liczby złożonej. Podobnie, jeśli $n \geqslant 6$ jest liczbą nieparzystą, to $n-3$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Wobec tego $n=3+(n-3)$ to szukane przedstawienie liczby n w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

---

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na pewien kolor. Okazało się, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b większych od 1 liczby $a+b$ i ab są tego samego koloru. Wykaż, że wszystkie liczby większe od 4 zostały pomalowane tym samym kolorem.

Szkic rozwiązania

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą większą od 1. Zgodnie z warunkami zadania liczby $n+3=2+(n+1)$ oraz $2(n+1)$ są tego samego koloru. Również liczby $2(n+1)=2n+2$ oraz $2n\cdot 2=4n$ są tego samego koloru. Ponadto liczby $4n$ oraz $n+4$ mają ten sam kolor. Łącząc powyższe obserwacje, dochodzimy do wniosku, że liczby $n+3$ oraz $n+4$ są tego samego koloru dla każdej liczby naturalnej $n>1$. To oznacza, że wszystkie liczby większe od 4 pomalowano tym samym kolorem.

---

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem boku CD. Znając długości odcinków AD oraz BC, które wynoszą odpowiednio a oraz b, oblicz wartość wyrażenia $[ABM]-[DAM]-[BCM]$.

Uwaga. Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Szkic rozwiązania

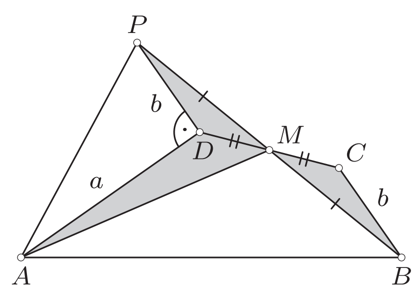
Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu B względem punktu M (rys. 1). Wówczas $[ABM]=[APM]$, gdyż trójkąty te mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A oraz równe podstawy BM i PM. Ponadto $[BCM]=[PDM]$, gdyż trójkąty te są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że

$$[ABM]-[DAM]-[BCM]=$$
$$=[APM]-[DAM]-[PDM]=[ADP].$$

Zauważmy, że $DP=BC=b$ oraz

$$\sphericalangle ADP = 360^\circ - \sphericalangle MDA - \sphericalangle PDM =$$
$$=360^\circ - \sphericalangle CDA - \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ,$$

skąd wniosek, że $[ADP]=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DP=\frac{1}{2}ab$.



rys. 1

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2+2b+1 \quad \text{oraz} \quad b^2+2a+1$$

są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Wykaż, że $a=b$.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że $a \neq b$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a<b$. Wówczas

$$b^2 < b^2+2a+1 < b^2+2b+1 = (b+1)^2.$$

To oznacza, że liczba b^2+2a+1 znajduje się między kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych, więc sama nie może być kwadratem liczby naturalnej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a=b$.

---

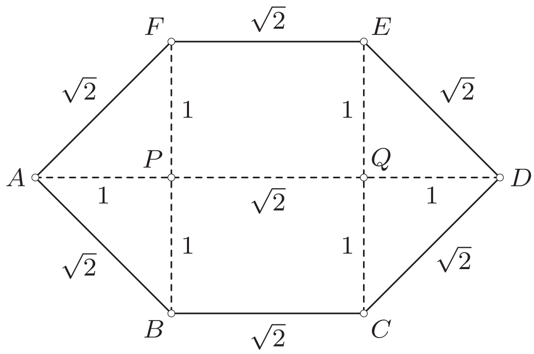
5. Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

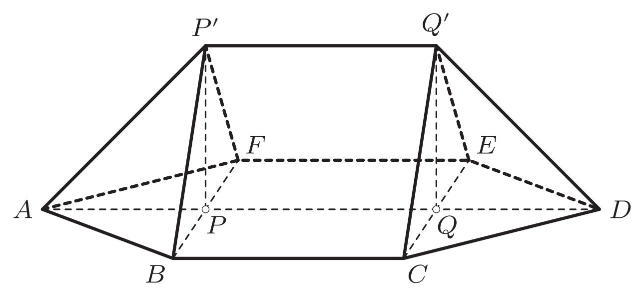
Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

Rozważmy płaszczyznę π oraz zawarty w niej prostokąt $BCEF$, w którym $BC=\sqrt{2}$ oraz $CE=2$. Zbudujmy na zewnątrz prostokąta $BCEF$ trójkąty prostokątne równoramienne ABF oraz CDE, których przeciwprostokątnymi są odpowiednio odcinki BF oraz CE. Wówczas $ABCDEF$ jest sześciokątem, którego każdy bok ma długość $\sqrt{2}$, ale nie wszystkie kąty wewnętrzne są równe (rys. 2).

Niech proste BF i CE przecinają odcinek AD odpowiednio w punktach P i Q oraz niech P' i Q' będą takimi punktami przestrzeni leżącymi po tej samej stronie płaszczyzny π, że $PP'=QQ'=1$ oraz proste PP' i QQ' są prostopadłe do π. Udowodnimy, że wielościan $\mathcal{W}$ o wierzchołkach A, B, C, D, E, F, P', Q' (rys. 3) spełnia warunki zadania.



rys. 2



rys. 3

Stosując twierdzenie Pitagorasa, bezpośrednio obliczamy, że każdy z odcinków FP', AP', BP', CQ', DQ', EQ' ma długość $\sqrt{2}$, a także $P'Q'=PQ=\sqrt{2}$. Stąd wniosek, że każdy z trójkątów ABP', FAP', CDQ', DEQ' jest równoboczny, a każdy z prostokątów $BCQ'P'$, $EFP'Q'$ jest kwadratem. To oznacza, że każda ze ścian wielościanu $\mathcal{W}$ oprócz $ABCDEF$ jest wielokątem foremnym.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku