XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(25 marca 2017 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których liczba

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczba $ab+bc+ca$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c$.

2. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E leży na odcinku CD. Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC, to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że każda z liczb

$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n>1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B, C, E, F są równe. Ponadto spełniona jest równość

$$AB+DE=AF+CD.$$

Wykaż, że prosta AD oraz symetralne odcinków BC i EF mają punkt wspólny.

5. Na stole leży n zapałek, które stanowią n jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos n-elementowy. Będzie to robił przy użyciu $n-1$ operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos a-elementowy ze stosem b-elementowym, dostanie od Bartka $a\cdot b$ cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu $n-1$ operacji? Odpowiedź uzasadnij.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku