XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(17 marca 2018 r.)

1. Dodatnie liczby nieparzyste a, b mają tę własność, że liczba $a^b b^a$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykaż, że liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AB+CD=AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię AD w punkcie F. Udowodnij, że $\sphericalangle BFC=90^\circ$.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1,2,3,\ldots,1000$ pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

4. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $\sphericalangle DME=60^\circ$. Wykaż, że $AD+BE=DE+\frac{1}{2}AB$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku