XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(23 marca 2019 r.)

1. Liczby całkowite a i b są większe od 1. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a-1}{b-1}$$

jest o 1 większa od drugiej, to obie są liczbami całkowitymi.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AC=BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD. Wykaż, że

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CBD\,.$$

3. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z, różne od zera, dla których $x+y+z=0$. Wiedząc, że liczby

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1$$

są równe, wyznacz ich wspólną wartość.

4. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Załóżmy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E, że

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle AED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ECB = \sphericalangle CEB.$$

Wykaż, że $AC+BC > AB+CE$.

5. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb -1, 0 lub 1. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku