XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (23 marca 2019 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a i b są większe od 1. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a-1}{b-1}$$

jest o 1 większa od drugiej, to obie są liczbami całkowitymi.

Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$\frac{a-1}{b-1}-\frac{a}{b}=\frac{b(a-1)-a(b-1)}{b(b-1)}=\frac{a-b}{b^2-b}$$

jest równa -1 lub 1. W pierwszym przypadku otrzymujemy $a=2b-b^2=b(2-b)\leqslant 0$, co przeczy założeniu, że liczba a jest dodatnia. Z kolei w drugim przypadku dostajemy

$$a-b=b^2-b, \quad \text{czyli} \quad a=b^2.$$

Wtedy obie liczby

$$\frac{a}{b}=\frac{b^2}{b}=b \quad \text{oraz} \quad \frac{a-1}{b-1}=\frac{b^2-1}{b-1}=b+1$$

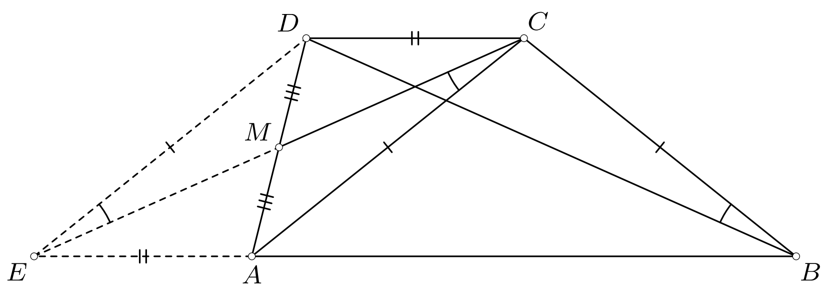
są całkowite.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AC=BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD. Wykaż, że

$$\sphericalangle ACM=\sphericalangle CBD.$$

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez E taki punkt prostej AB, że czworokąt $EACD$ jest równoległobokiem (rys. 1). Wówczas punkt M — jako środek odcinka AD — jest także środkiem odcinka EC. Ponadto $ED=AC=BC$, skąd wniosek, że trapez $EBCD$ jest równoramienny. W konsekwencji $\sphericalangle ACM=\sphericalangle ACE=\sphericalangle CED=\sphericalangle CBD$.



rys. 1

3. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z, różne od zera, dla których $x+y+z=0$. Wiedząc, że liczby

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1$$

są równe, wyznacz ich wspólną wartość.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez S wspólną wartość dwóch rozpatrywanych liczb, czyli

$$S=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad S=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1.$$

Dodając stronami te dwie równości oraz korzystając trzykrotnie z $x+y+z=0$, uzyskujemy

$$2S=\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+1=\frac{-z}{z}+\frac{-x}{x}+\frac{-y}{y}+1=-1-1-1+1=-2.$$

Stąd $S=-1$.

Uwaga

Można wykazać, że istnieją liczby x, y, z spełniające warunki zadania.

---

4. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Załóżmy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E, że

$$\sphericalangle EAD=\sphericalangle AED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ECB=\sphericalangle CEB.$$

Wykaż, że $AC+BC>AB+CE$.

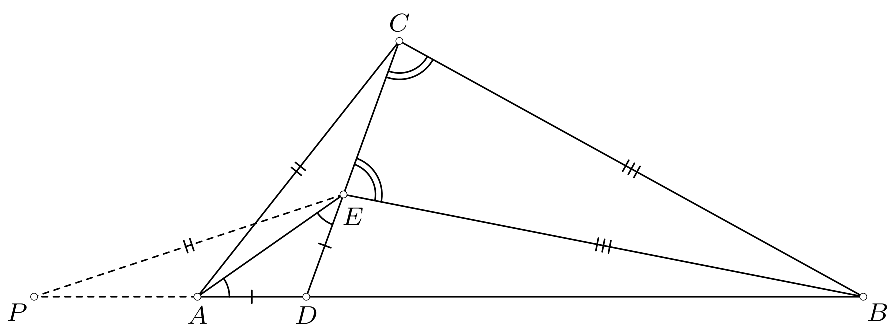
Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że $AD=DE$ oraz $BC=BE$. Niech P będzie takim punktem prostej AB, że $AP=CE$ oraz punkt A leży na odcinku DP (rys. 2). Wówczas

$$DP=AD+AP=DE+CE=CD,$$

co w połączeniu z równością $AD=DE$ oznacza, że trójkąty ADC oraz EDP są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $AC=EP$. Stąd wynika, że

$$AC+BC=EP+BE>BP=AB+AP=AB+CE.$$



rys. 2

---

5. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb -1, 0 lub 1. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Największa możliwa suma wpisanych liczb jest równa 11.

Rozważmy figurę złożoną z siedmiu pól tablicy przedstawioną na rysunku 3. Z warunków zadania wynika, że w każdym kwadracie 2×2 suma wpisanych liczb jest nie większa od 1, skąd wniosek, że

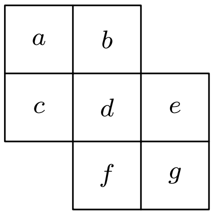
$$a+b+c+d\leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad d+e+f+g\leqslant 1.$$

Łącząc te nierówności oraz korzystając z $d\geqslant -1$, uzyskujemy

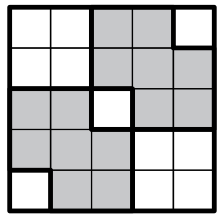
$$a+b+c+d+e+f+g=(a+b+c+d)+(d+e+f+g)-d\leqslant 2-d\leqslant 3.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

To oznacza, że suma liczb wpisanych w każdą z dwóch szarych figur przedstawionych na rysunku 4 jest nie większa od 3. Ponadto suma liczb wpisanych w każdy z pięciu białych kwadratów jest nie większa od 1. Zatem suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest nie większa od $2\cdot 3+5\cdot 1=11$.



rys. 3



rys. 4

1	0	1	0	1
1	-1	1	-1	1
1	0	1	0	1
1	-1	1	-1	1
1	0	1	0	1

rys. 5

Pozostaje zauważyć, że można wpisać liczby w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania tak, aby suma wszystkich wpisanych liczb była równa 11 (rys. 5).

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku