XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia

(20 marca 2021 r.)

1. Dodatnie liczby całkowite a, b oraz n spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}.$$

Wykaż, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

2. W trójkącie prostokątnym ABC punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AM i MB, przy czym $PQ = CQ$. Udowodnij, że $AP \leqslant 2 \cdot MQ$.

3. W turnieju badmintona uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

4. Na boku AB nierównoramiennego trójkąta ABC leżą takie punkty M i N, że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $\sphericalangle CSM = \sphericalangle CSN$.

5. Dane są liczby naturalne a, b, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej