XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (19 marca 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1. Punkty K, L, M, N, różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD, DA. Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest mniejszy od 2.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy *nie wprost*, że każdy z obwodów trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest nie mniejszy od 2. Wykażemy, że przypuszczenie to jest sprzeczne z założeniami zadania.

Na mocy nierówności trójkąta zastosowanej do trójkąta ANK mamy $AN+AK>KN$. Korzystając z tej nierówności oraz z założenia dotyczącego obwodu trójkąta ANK poczynionego w poprzednim akapicie, uzyskujemy

$$(AN+AK)+(AN+AK)>AN+AK+KN\geqslant 2, \quad \text{skąd} \quad AN+AK>1.$$

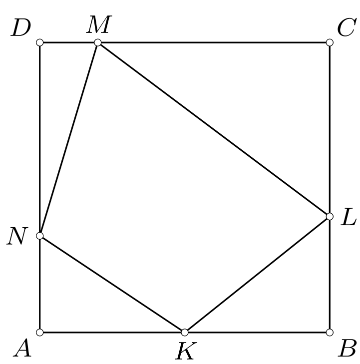
Analogiczne rozumowania przeprowadzone dla trójkątów BKL, CLM, DMN prowadzą do wniosku, że

$$BK+BL>1, \quad CL+CM>1, \quad DM+DN>1.$$

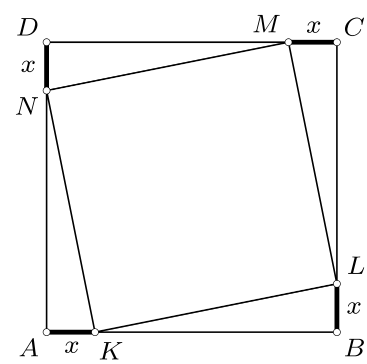
Dodając stronami cztery uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$AN+AK+BK+BL+CL+CM+DM+DN>4.$$

Tymczasem lewa strona uzyskanej wyżej nierówności jest równa obwodowi kwadratu $ABCD$, czyli dokładnie 4 (rys. 1). Uzyskana sprzeczność oznacza, że poczynione na początku przypuszczenie jest fałszywe, co dowodzi tezy zadania.



rys. 1



rys. 2

Uwaga 1.

Jeżeli punkty K, L, M, N zostaną wybrane w taki sposób, że $AK=BL=CM=DN=x$, przy czym $0<x<1$ (rys. 2), to długość każdego z odcinków KL, LM, MN, NK będzie większa od $1-x$, a w konsekwencji obwód każdego z danych trójkątów będzie większy od

$$x+(1-x)+(1-x)=2-x.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Jednocześnie każdy z tych obwodów będzie mniejszy od 2. To oznacza, że wybierając dostatecznie małą liczbę x, można uzyskać konfigurację, w której obwód każdego z czterech rozważanych trójkątów będzie dowolnie bliski liczbie 2.

Sposób II

Zauważmy, że suma czterech liczb

$$AN+AK, \quad BK+BL, \quad CL+CM, \quad DM+DN$$

jest równa obwodowi kwadratu $ABCD$, czyli 4. To oznacza, że co najmniej jedna z powyższych czterech liczb jest nie większa od 1.

Przypuśćmy najpierw, że $AN+AK \leqslant 1$. Wówczas na mocy nierówności trójkąta

$$AN+AK+KN < AN+AK+AN+AK = 2\cdot(AN+AK) \leqslant 2,$$

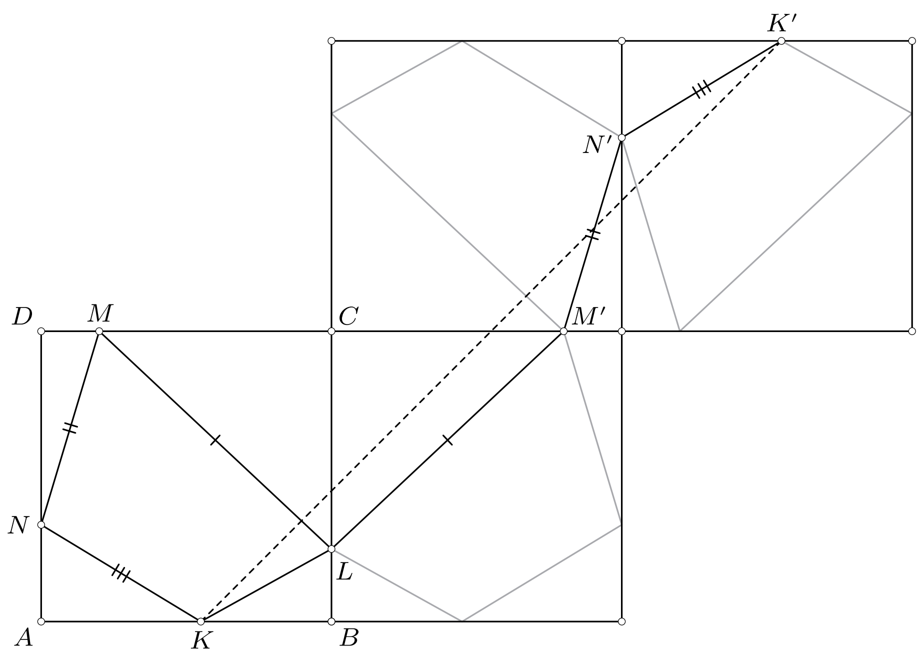
czyli obwód trójkąta ANK jest mniejszy od 2.

W pełni analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w pozostałych trzech przypadkach: założenia $BK+BL \leqslant 1$, $CL+CM \leqslant 1$, $DM+DN \leqslant 1$ prowadzą do wniosków mówiących, że obwody trójkątów BKL, CLM, DMN są (w odpowiednim przypadku) mniejsze od 2.

Uwaga 2.

W omawianym zadaniu należało udowodnić, że *najmniejszy* z obwodów czterech rozważanych trójkątów jest *mniejszy od* 2. Wykażemy inną własność tego typu: *największy* z obwodów czterech rozważanych trójkątów jest *nie mniejszy od* $1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}707$.

Zauważmy, że postulowany fakt będzie udowodniony, jeśli wykażemy, że obwód czworokąta $KLMN$ jest nie mniejszy od $2\sqrt{2}$. Rzeczywiście, nierówność ta prowadzi do wniosku, że suma obwodów czterech rozważanych trójkątów jest nie mniejsza od $4+2\sqrt{2}$, skąd wniosek, że największy z nich jest równy co najmniej $\frac{1}{4}(4+2\sqrt{2}) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.



rys. 3

Aby przekonać się o tym, że obwód czworokąta $KLMN$ jest nie mniejszy od $2\sqrt{2}$, wystarczy „rozwinąć” ten obwód do łamanej $KLM'N'K'$ (rys. 3) i zauważyć, że długość tej łamanej jest nie mniejsza od długości odcinka KK', czyli $2\sqrt{2}$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$1\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad 3\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ siódemek}}$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia wyłącznie liczba $n=1$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$A_n = 1\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad B_n = 3\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ siódemek}}.$$

Zauważmy, że dla $n=1$ obydwie liczby $A_1=17$ oraz $B_1=37$ są pierwsze. W dalszej części rozwiązania będziemy zakładać, że $n \geqslant 2$. Udowodnimy, że co najmniej jedna z liczb A_n, B_n jest wówczas złożona, co zakończy rozwiązanie.

Jeżeli n jest liczbą podzielną przez 3, to $n=3k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$. Wówczas suma cyfr liczby B_n jest równa

$$3+7n=3+21k=3(1+7k).$$

Korzystając z cechy podzielności przez 3 wnioskujemy, że liczba B_n jest podzielna przez 3. Jest to więc liczba złożona, gdyż $B_n>3$.

Podobnie jeżeli n daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to $n=3k+2$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 0$. Wówczas suma cyfr liczby A_n jest równa

$$1+7n=1+21k+14=3(7k+5).$$

Ponownie z cechy podzielności przez 3 uzyskujemy, że liczba A_n jest podzielna przez 3 i w konsekwencji — jest złożona (jako liczba większa od 3).

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba n jest większa od 1 i daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, czyli $n=3k+1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$. Wówczas, wykorzystując równości $777=7\cdot111=21\cdot37$, możemy zapisać

$$B_n = 37\underbrace{777777\ldots777}_{k \text{ segmentów „777”}} = 37\cdot1\underbrace{021021\ldots021}_{k \text{ segmentów „021”}}.$$

Wobec tego liczba B_n jest złożona, jako iloczyn dwóch liczb całkowitych większych od 1.

Uwaga 1.

Zamiast odwoływać się do cechy podzielności przez 3 w pierwszych dwóch z omówionych wyżej przypadków, można także zapisać odpowiednie przedstawienia rozważanych liczb w postaci iloczynów dwóch liczb całkowitych większych od 1. Mianowicie, jeżeli $n=3k$, to

$$B_n = 3\underbrace{77\ldots7}_{3k} = 3\cdot1\underbrace{259259\ldots259}_{k \text{ segmentów „259”}},$$

a jeżeli $n=3k+2$, to

$$A_n = 1\underbrace{77\ldots7}_{3k+2} = 3\cdot59\underbrace{259259\ldots259}_{k \text{ segmentów „259”}}.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Uwaga 2.

Dla dowodu podzielności liczby B_{3k+1} przez 37 można również wykorzystać następującą ogólną obserwację. W jej sformułowaniu przez *złączenie* nieujemnych liczb całkowitych będziemy rozumieli zapisanie tych liczb jednej za drugą i potraktowanie całości jako liczbę całkowitą. Przykładowo liczba 421407 może być traktowana jako złączenie liczb 42, 140, 7.

> *Dana jest liczba całkowita $d \geqslant 1$. Jeżeli zapis dziesiętny pewnej dodatniej liczby całkowitej n powstaje poprzez złączenie zapisów dziesiętnych pewnych nieujemnych całkowitych wielokrotności liczby d, to liczba n jest podzielna przez d.*

Przykładowo dla $d=7$ obserwacja może zostać użyta do stwierdzenia, że liczba $n=421407$ jest podzielna przez 7, gdyż jest złączeniem liczb 42, 140, 7, z których każda jest podzielna przez 7. Formalne uzasadnienie tej obserwacji można przeprowadzić zauważając, że liczba n jest sumą złączanych liczb przemnożonych przez pewne potęgi liczby 10, a zatem jest sumą liczb podzielnych przez d. Dla powyższego przykładu takim przedstawieniem jest

$$n = 42 \cdot 10^4 + 140 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Liczba B_{3k+1} jest złączeniem liczby 37 oraz k kopii liczby $777 = 21 \cdot 37$. Każda ze złączanych liczb jest podzielna przez 37, więc na mocy poczynionej obserwacji liczba B_{3k+1} również jest podzielna przez 37.

Uwaga 3.

Odnotujmy, że następujące liczby są pierwsze:

$$B_{11},\ B_{17},\ A_9,\ A_{13},\ \frac{1}{3}A_{26},\ \frac{1}{3}B_9,\ \frac{1}{37}B_4,\ \frac{1}{37}B_{13}.$$

To pozwala przypuszczać, że trudno o alternatywne rozwiązanie zadania, nie wykorzystujące podzielności przez 3 oraz 37.

---

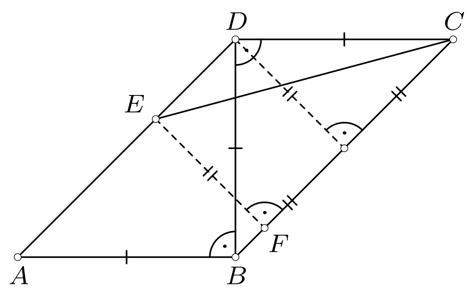
3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle CBD = 45^\circ$. Punkt E leży na odcinku AD, przy czym $BC = CE$. Wyznacz miarę kąta BCE.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Kąt BCE ma miarę 30°.

Sposób I

Zauważmy, że $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = 90^\circ$, co w połączeniu z założeniem $\sphericalangle CBD = 45^\circ$ oznacza, że trójkąt BCD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, czyli połówką kwadratu. W szczególności wynika z tego, że wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka D ma długość $\frac{1}{2}BC$.



rys. 4

Oznaczmy przez F rzut prostokątny punktu E na prostą BC (rys. 4). Wówczas EF jest wysokością danego równoległoboku, wobec czego ma tę samą długość, co wspomniana w poprzednim akapicie wysokość trójkąta BCD, skąd

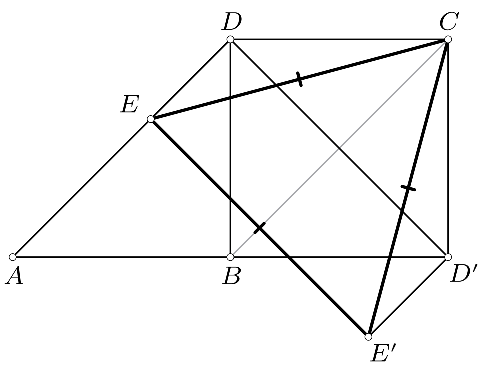
$$EF = \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}CE.$$

To zaś oznacza, że trójkąt prostokątny CEF jest połówką trójkąta równobocznego i w konsekwencji $\sphericalangle FCE = \sphericalangle BCE = 30^\circ$.

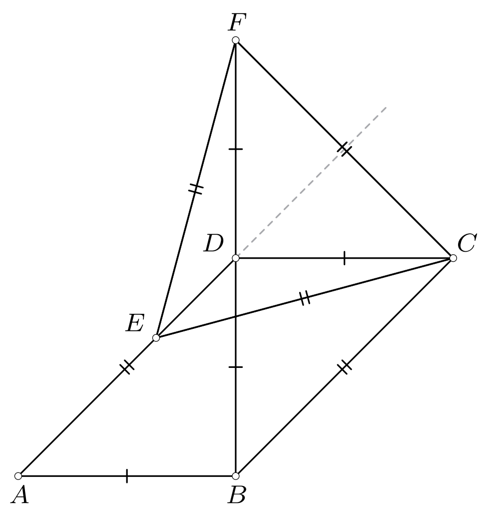
Sposób II

Oznaczmy przez D' oraz E' odbicia symetryczne odpowiednio punktów D oraz E względem prostej BC (rys. 5). Czworokąt $DEE'D'$ jest prostokątem, a czworokąt $BDCD'$ jest kwadratem, skąd wniosek, że $EE' = DD' = BC$. Ponadto z warunków zadania oraz z definicji punktu E' wynika, że $BC = CE = CE'$, więc trójkąt CEE' jest równoboczny. W konsekwencji

$$\sphericalangle BCE = \tfrac{1}{2}\sphericalangle E'CE = \tfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$



rys. 5



rys. 6

Sposób III

Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CD (rys. 6).

Zauważmy, że trójkąty ABD, BDC, CDF są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi, a punkty C i F są symetryczne względem prostej AD. Wobec tego

$$CF = BC = CE = FE,$$

skąd wniosek, że trójkąt CEF jest równoboczny. W konsekwencji

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD + \sphericalangle FCD - \sphericalangle FCE = 45^\circ + 45^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Sposób IV

Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu E względem prostej CD (rys. 7). Wówczas trójkąty CDE oraz CDF są przystające. Ponadto skoro $BD = CD$ oraz

$$\sphericalangle BDF = 135^\circ = \sphericalangle CDF,$$

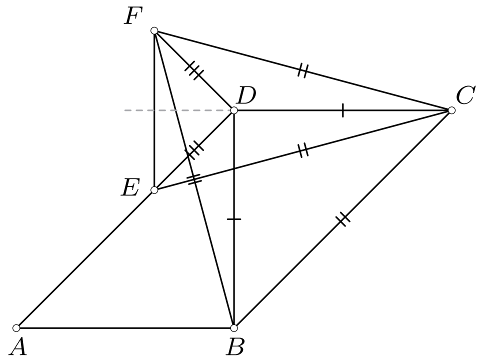
to również trójkąty BDF oraz CDF są przystające (cecha bok–kąt–bok). W konsekwencji

$$BF = CF = CE = BC,$$

skąd wniosek, że trójkąt BCF jest równoboczny. To oznacza, że

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle DBF = \sphericalangle CBF - \sphericalangle CBD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

i w rezultacie $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle DCE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.



rys. 7

---

4. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c).$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: Trójka (a,b,c) jest rozwiązaniem danego równania dokładnie wtedy, gdy dwie spośród liczb a, b, c są równe 1 oraz -1, a trzecia jest dowolną liczbą całkowitą różną od 0.

Sposób I

Przypuśćmy, że trójka (a,b,c) spełnia daną równość. Mnożąc obie jej strony przez liczbę $(1+a)(1+b)(1+c)$, uzyskujemy

$$(1+a)(1-a)\cdot(1+b)(1-b)\cdot(1+c)(1-c) = (1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2.$$

Stąd, na mocy tożsamości $(1+x)(1-x) = 1-x^2$ prawdziwej dla każdej liczby x, otrzymujemy

$$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = \left((1+a)(1+b)(1+c)\right)^2. \qquad (*)$$

Prawa strona równości $(*)$ jest liczbą nieujemną, jako kwadrat pewnej liczby całkowitej. Skoro liczby całkowite a, b, c są różne od 0, to $a^2 \geqslant 1$, $b^2 \geqslant 1$, $c^2 \geqslant 1$, czyli $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$ to liczby niedodatnie. Lewa strona równości $(*)$ jest więc iloczynem trzech liczb niedodatnich, czyli liczbą niedodatnią.

Skoro prawa strona równości $(*)$ jest nieujemna, a lewa strona tej równości jest niedodatnia, to obie strony są równe 0. To oznacza, że

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 0$$

skąd wniosek, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1. Wobec tego z danej w treści zadania równości płynie wniosek, że

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 0,$$

czyli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli pośród liczb a, b, c jest co najmniej jedna równa 1 i co najmniej jedna równa -1, to dane równanie jest spełnione — jego obie strony są bowiem równe 0. To oznacza, że trójka (a,b,c) jest rozwiązaniem danego równania dokładnie wtedy, gdy wśród liczb a, b, c pojawia się zarówno 1, jak i -1.

Sposób II

Zauważmy, że jeżeli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1, to lewa strona rozważanego równania jest równa 0. To oznacza, że prawa strona także jest równa 0, czyli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1. Wówczas równość z treści zadania jest oczywiście spełniona. Podobnie rozumując, uzasadniamy, że jeśli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1, to co najmniej jedna z tych liczb jest równa 1 i znów otrzymujemy trójkę będącą rozwiązaniem.

Przypuśćmy, że istnieje trójka (a,b,c) spełniająca rozważane równanie, w której żadna z liczb a, b, c nie jest równa 1 ani -1. Ponieważ liczby a, b, c są różne od zera, więc oznacza to, że $|a|\geqslant 2$, $|b|\geqslant 2$, $|c|\geqslant 2$. Wymnażając nawiasy po obu stronach wyjściowego równania, uzyskujemy zależność

$$1-a-b-c+ab+bc+ca-abc=1+a+b+c+ab+bc+ca+abc, \quad \text{skąd} \quad a+b+c=-abc.$$

Dzieląc ostatnią równość obustronnie przez (różną od zera) liczbę abc, uzyskujemy

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=-1.$$

Dla dowolnych liczb x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$|x+y+z|\leqslant|x|+|y|+|z|.$$

Wykorzystując tę nierówność dla liczb $x=\frac{1}{bc}$, $y=\frac{1}{ca}$, $z=\frac{1}{ab}$, uzyskujemy

$$1=|-1|=\left|\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right|\leqslant\left|\frac{1}{bc}\right|+\left|\frac{1}{ca}\right|+\left|\frac{1}{ab}\right|=\frac{1}{|b|\cdot|c|}+\frac{1}{|c|\cdot|a|}+\frac{1}{|a|\cdot|b|}.$$

Na mocy nierówności $|a|\geqslant 2$, $|b|\geqslant 2$, $|c|\geqslant 2$, stwierdzamy jednak, że

$$\frac{1}{|b|\cdot|c|}+\frac{1}{|c|\cdot|a|}+\frac{1}{|a|\cdot|b|}\leqslant\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}.$$

Uzyskaliśmy następującą sprzeczność

$$1\leqslant\frac{1}{|b|\cdot|c|}+\frac{1}{|c|\cdot|a|}+\frac{1}{|a|\cdot|b|}\leqslant\frac{3}{4},$$

która oznacza, że w rozważanym przypadku nie ma rozwiązań.

Sposób III

Przypuśćmy, że liczby a, b, c są różne od -1, czyli liczby $1+a$, $1+b$, $1+c$ są różne od 0. Wówczas dane równanie można przekształcić do postaci

$$\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\cdot\frac{1-c}{1+c}=1.$$

Stąd wniosek, że liczby $1-a$, $1-b$, $1-c$ są różne od 0, czyli a, b, c są różne od 1.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Zauważmy, że jeżeli liczba całkowita n jest różna od liczb 0, 1 oraz -1, to liczby $1-n$ oraz $1+n$ są *przeciwnych znaków*, tzn. jedna z nich jest dodatnia, a druga jest ujemna. Wobec tego iloraz tych liczb $\frac{1-n}{1+n}$ jest liczbą ujemną. Wykorzystując tę obserwację kolejno dla $n=a$, $n=b$, $n=c$, uzyskujemy

$$\frac{1-a}{1+a}<0, \quad \frac{1-b}{1+b}<0, \quad \frac{1-c}{1+c}<0, \quad \text{skąd} \quad \frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\cdot\frac{1-c}{1+c}<0,$$

gdyż iloczyn trzech liczb ujemnych jest liczbą ujemną. Uzyskaliśmy sprzeczność z uzyskanym wcześniej rezultatem, że ten iloczyn jest równy 1.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1. W konsekwencji $(1-a)(1-b)(1-c)=0$, a zatem jedna z liczb jest równa 1, skąd uzyskujemy sformułowaną na początku odpowiedź.

Uwaga

Pominięcie założenia, że liczby a, b, c są różne od 0 powoduje, że pojawiają się dodatkowe rozwiązania. Rzeczywiście, jeśli np. $a=0$, to dane równanie przybiera równoważną formę

$$(1-b)(1-c)=(1+b)(1+c), \quad \text{czyli} \quad 1-b-c+bc=1+b+c+bc,$$

skąd $b+c=0$. Analogicznie dla $b=0$ lub $c=0$. To oznacza, że równanie z treści zadania spełniają również trójki, w których jedna z liczb jest równa 0, a dwie pozostałe są liczbami wzajemnie przeciwnymi (w szczególności wszystkie trzy liczby a, b, c mogą być równe 0).

---

5. W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Rozwiązanie

Przedstawmy każdą z liczb wpisanych do tabeli w postaci sumy $w+k$, gdzie w jest jedną z liczb 0, 4, 8, 12, a k jest jedną z liczb 1, 2, 3, 4 (rys. 8). Składnik w każdej z otrzymanych sum nazwijmy *wierszowym*, a składnik k — *kolumnowym*. Zauważmy, że dowolny wiersz rozważanej tabeli zawiera liczby o identycznych składnikach wierszowych. Podobnie dowolna kolumna rozważanej tabeli zawiera liczby o identycznych składnikach kolumnowych.

$\mathbf{0}+1$	$\mathbf{0}+2$	$\mathbf{0}+3$	$\mathbf{0}+4$
$\mathbf{4}+1$	$\mathbf{4}+2$	$\mathbf{4}+3$	$\mathbf{4}+4$
$\mathbf{8}+1$	$\mathbf{8}+2$	$\mathbf{8}+3$	$\mathbf{8}+4$
$\mathbf{12}+1$	$\mathbf{12}+2$	$\mathbf{12}+3$	$\mathbf{12}+4$

rys. 8

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Rozważmy dowolne rozmieszczenie minusów w tabeli zgodne z warunkami zadania. Suma wszystkich liczb w tabeli jest równa sumie dwóch liczb: sumy wszystkich składników wierszowych oraz sumy wszystkich składników kolumnowych. Przyjmujemy przy tym, że jeśli liczba $w+k$ została poprzedzona znakiem minus, to jej składnikiem wierszowym jest $-w$, a jej składnikiem kolumnowym jest $-k$.

Rozważmy dowolny wiersz tablicy, w którym początkowo znajdowały się cztery składniki wierszowe równe w. Ponieważ dokładnie dwa z nich wchodzą w skład liczb poprzedzonych minusami, więc suma składników wierszowych w tym wierszu jest równa

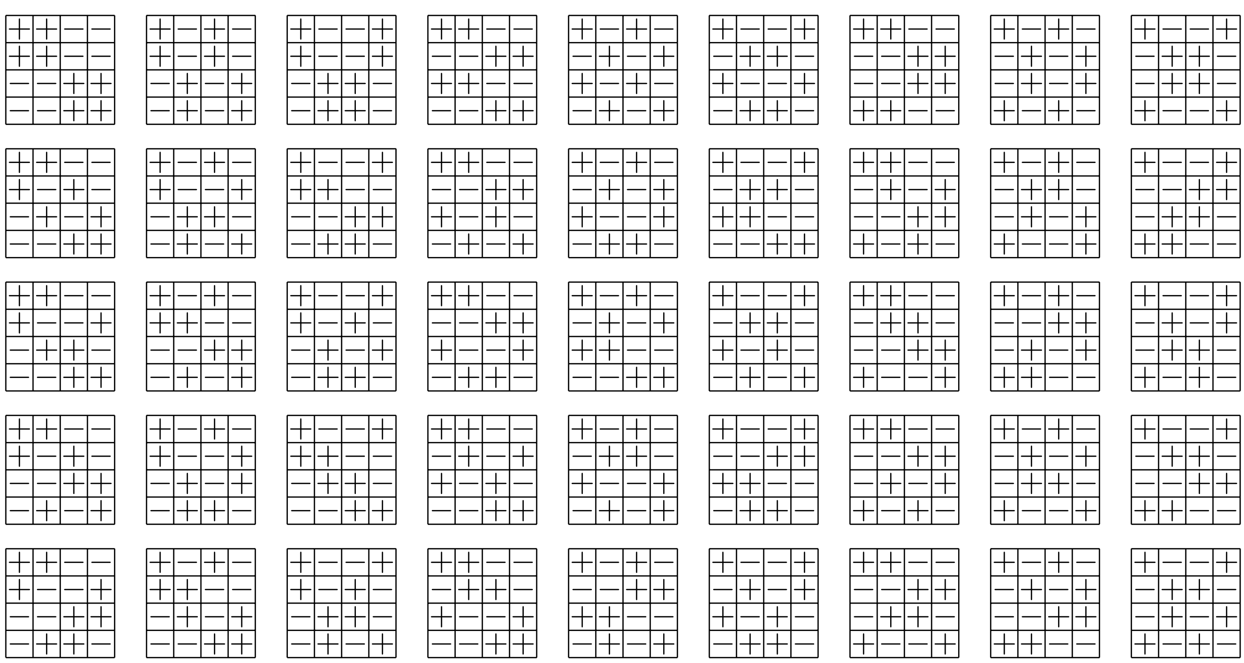
$$w+w+(-w)+(-w)=0.$$

Ponieważ w każdym wierszu suma składników wierszowych jest równa 0, więc w całej tabeli suma wszystkich składników wierszowych jest równa 0.

Analogicznie stwierdzamy, że w każdej kolumnie suma składników kolumnowych jest równa 0, więc łącznie w całej tabeli suma wszystkich składników kolumnowych jest równa 0. W konsekwencji suma wszystkich składników (wierszowych i kolumnowych) jest równa 0, czyli suma wszystkich liczb w tablicy, jest równa 0, co należało udowodnić.

Uwaga 1.

Okazuje się, że różnych sposobów rozmieszczenia minusów w tabeli zgodnie z warunkami zadania jest dokładnie 90 (rys. 9 ilustruje połowę z nich — drugą połowę można uzyskać poprzez zamianę wszystkich plusów na minusy a minusów na plusy). Jednak samo sprawdzenie nawet wszystkich spośród tych przypadków nie stanowi jeszcze rozwiązania zadania — do pełnego rozwiązania niezbędne jest uzasadnienie, że są to rzeczywiście *wszystkie* możliwe rozmieszczenia (czyli, że nie ma innych).



rys. 9

Każde rozmieszczenie znaków (plusów i minusów) w tabeli zgodnie z warunkami zadania nazwiemy *poprawnym*. Udowodnimy, że liczba różnych poprawnych rozmieszczeń jest rzeczywiście równa 90.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli pewne rozmieszczenie jest poprawne, to zamieniając wszystkie plusy na minusy, a wszystkie minusy na plusy również uzyskamy rozmieszczenie poprawne. Każdemu rozmieszczeniu, które w polu na przecięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny ma znak + odpowiada w ten sposób dokładnie jedno rozmieszczenie, które w tym polu ma znak $-$. Wobec tego łączna liczba poprawnych rozmieszczeń jest równa dwukrotności liczby poprawnych rozmieszczeń, w których lewy górny narożnik tablicy zawiera znak + (wszystkie takie rozmieszczenia są zilustrowane na rysunku 9).

Jeśli na przecięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny jest +, to w pierwszym wierszu jest jeszcze jeden plus (powiedzmy w kolumnie k) i w pierwszej kolumnie jest jeszcze jeden plus (powiedzmy w wierszu w). Zarówno kolumnę k, jak i wiersz w można wybrać na 3 sposoby, co łącznie daje 9 możliwych wyborów pary (w,k) (na rysunku 9 każdej takiej parze odpowiada jedna kolumna złożona z pięciu tabel). Przekonamy się, że dla każdego z tych wyborów jest dokładnie 5 sposobów wpisania do tablicy pozostałych znaków.

Jeżeli na przecięciu kolumny k i wiersza w znajduje się +, to możemy jednoznacznie określić położenie wszystkich pozostałych znaków w tablicy (cztery pozostałe pola wiersza w i kolumny k zawierają minusy, a cztery pozostałe pola tablicy — plusy). Ten przypadek jest zilustrowany w najwyższym wierszu rysunku 9. Jeżeli na przecięciu kolumny k i wiersza w znajduje się $-$, to są dwa możliwe położenia + w wierszu w i dwa możliwe położenia + w kolumnie k. Każda z tych czterech możliwości odpowiada dokładnie jednemu poprawnemu rozmieszczeniu znaków w tabeli.

Ostatecznie uzyskujemy więc $2\cdot 9\cdot 5=90$ różnych sposobów wypełnienia tabeli zgodnie z warunkami zadania.

Uwaga 2.

Zadanie (i rozwiązanie) można w naturalny sposób uogólnić na przypadek tabeli $2n\times 2n$, do której wpisane są kolejne liczby od 1 do $(2n)^2$. Wówczas po poprzedzeniu połowy z nich znakami minus w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie n minusów, uzyskujemy tabelę, w której suma wszystkich liczb jest równa 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

rys. 10

Na szczególną uwagę zasługuje przypadek $n=5$ (rys. 10), w którym zapis dziesiętny sugeruje pomysł rozkładu liczb na składniki wierszowe i kolumnowe.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki