IV Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Mała Morávka (Czechy), 19 maja 2015 — Zawody drużynowe

Szkice rozwiązań zadań

1. Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M — środkiem boku BC. Udowodnij, że jeżeli $AI = MI$, to jeden z boków trójkąta ABC jest dwa razy dłuższy od innego boku.

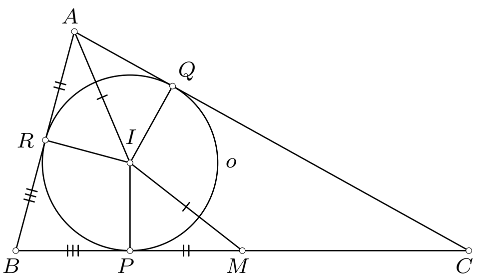
Szkic rozwiązania

Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego o w trójkąt ABC z bokami BC, CA, AB odpowiednio przez P, Q, R (rys. 1).

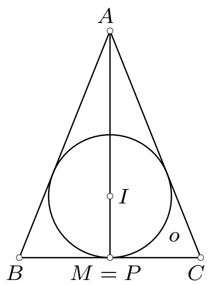
Rozważmy najpierw przypadek, gdy P leży na odcinku BM. Zauważmy, że $IP = IR$, gdyż odcinki te są promieniami okręgu o. Ponadto z założenia wiemy, że $AI = IM$. Wobec tego trójkąty prostokątne IPM i IRA są przystające, gdyż mają równe przeciwprostokątne i jedną z przyprostokątnych. Wynika stąd, że $MP = AR$. Z drugiej strony odcinki BP i BR są równe, gdyż są to odcinki styczne do okręgu o poprowadzone z punktu B. Wobec tego

$$\frac{1}{2}BC = BM = BP + MP = BR + AR = AB.$$

W przypadku, gdy punkt P leży na odcinku MC dowodzimy analogicznie, że bok BC jest dwa razy dłuższy od boku AC.



rys. 1



rys. 2

Przypadek, w którym punkty M i P się pokrywają (rys. 2) nie może zajść, bowiem A leży na zewnątrz okręgu o, wobec czego odcinek AI jest dłuższy niż promień okręgu o, którego długość w tym przypadku wynosi IM.

---

2. Z szachownicy o wymiarach 8×8 usunięto cztery pola środkowego kwadratu 2×2.

(a) Jaka jest *największa* możliwa liczba hetmanów, które można umieścić na pozostałych 60 polach szachownicy w taki sposób, aby żadne dwa hetmany się nie biły?

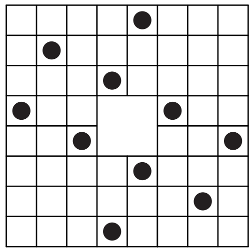
(b) Jaka jest *najmniejsza* możliwa liczba hetmanów, które można umieścić na szachownicy w taki sposób, aby każde z 60 pól było bite przez co najmniej jednego hetmana?

Uwaga. Hetman to figura szachowa, która może poruszać się o dowolną liczbę pól w pionie, poziomie lub na skos. Zakładamy, że pod biciem hetmana jest pole na którym stoi oraz wszystkie pola szachownicy, na które może dostać się w jednym ruchu, nie przemieszczając się nad innymi figurami ani nad żadnym z czterech usuniętych pól.

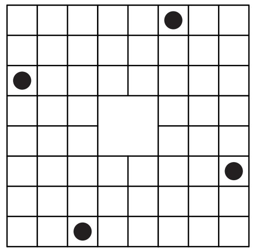
Szkic rozwiązania

(a) Rozważmy ustawienie hetmanów, w którym żadne dwa się nie biją. Wówczas w każdej z trzech skrajnych (lewych lub prawych) kolumn szachownicy może znajdować się co najwyżej jeden hetman (w przeciwnym razie dwa znajdujące się w tej samej kolumnie by się biły). Podobnie uzasadniamy, że w każdej z dwóch środkowych kolumn mogą znajdować się co najwyżej dwa hetmany. To oznacza, że łączna liczba hetmanów na szachownicy nie przekracza $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$.

Rysunek 3 przedstawia układ 10 hetmanów, z których żadne dwa się nie biją. Stąd wniosek, że szukana największa możliwa liczba hetmanów jest równa **10**.



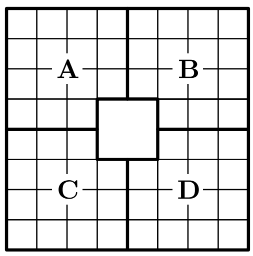
rys. 3



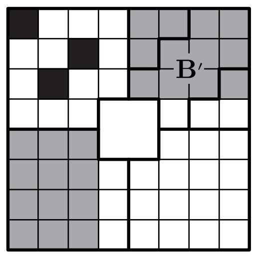
rys. 4

(b) Rysunek 4 przedstawia taką konfigurację 4 hetmanów, że każde z 60 pól szachownicy znajduje się pod biciem co najmniej jednego z nich. Zadanie będzie rozwiązane, gdy uzasadnimy, że opisanej własności nie mają konfiguracje trzech lub mniej hetmanów.

Przeprowadzimy dowód nie wprost — przypuśćmy, że na szachownicy znajdują się co najwyżej trzy hetmany. To oznacza, że w co najmniej jednym z czterech obszarów widocznych na rysunku 5 nie znajduje się żaden hetman; bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to obszar **A**.



rys. 5



rys. 6

Rozważmy trzy pola obszaru **A**, oznaczone na rysunku 6. Każde z tych pól jest bite przez pewnego hetmana znajdującego się w obszarze **B** lub **C**, przy czym żadne dwa z tych pól nie znajdują się pod biciem tego samego hetmana. To oznacza, że wszystkie trzy hetmany obecne na szachownicy znajdują się na zacienionych polach obszarów **B** i **C**, a w obrębie obszarów **A** i **D** nie znajduje się żaden hetman. W szczególności jeden z obszarów **B** i **C** zawiera co najwyżej jednego hetmana — bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to obszar **B**.

Zauważmy, że żadne z pól obszaru **B′** nie znajduje się pod biciem hetmanów z obszaru **C**, co oznacza, że cały obszar **B′** musi być bity przez jednego hetmana znajdującego się w obszarze **B**. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje jednak, że nie istnieje takie ustawienie jednego hetmana wewnątrz obszaru **B**, że cały obszar **B′** jest przez niego bity. Uzyskana sprzeczność oznacza, że na szachownicy muszą znajdować się co najmniej 4 hetmany.

---

3. Różne punkty A i D leżą po tej samej stronie prostej BC, przy czym $AB=BC=CD$ oraz proste AD i BC są prostopadłe. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC. Udowodnij, że

$$|BE-CE| < AD\cdot\sqrt{3}.$$

Szkic rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia $x=BE$ oraz $y=CE$. Zauważmy, że $x\neq y$, gdyż w przeciwnym razie trójkąty prostokątne ABE i DCE byłyby przystające, skąd $A=D$, co jest sprzeczne z założeniami zadania.

Ponieważ $AB=CD=x+y$, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABE i DCE, uzyskujemy

$$AD=|AE-DE|=\left|\sqrt{AB^2-BE^2}-\sqrt{CD^2-CE^2}\right|=\left|\sqrt{(x+y)^2-x^2}-\sqrt{(x+y)^2-y^2}\right|.$$

Dowodzoną nierówność możemy teraz przepisać w zależności od x, y i sprowadzić do prawdziwej nierówności $(x-y)^4>0$, przekształcając równoważnie następująco:

$$|x-y|<\left|\sqrt{(x+y)^2-x^2}-\sqrt{(x+y)^2-y^2}\right|\cdot\sqrt{3},$$

$$(x-y)^2<3\left(\sqrt{2xy+y^2}-\sqrt{2xy+x^2}\right)^2,$$

$$x^2+y^2-2xy<6xy+3y^2+6xy+3x^2-6\sqrt{(2xy+y^2)(2xy+x^2)},$$

$$3\sqrt{xy(2x^2+2y^2+5xy)}<x^2+y^2+7xy,$$

$$18x^3y+18xy^3+45x^2y^2<x^4+y^4+51x^2y^2+14x^3y+14xy^3,$$

$$0<x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4,$$

$$0<(x-y)^4.$$

Uwaga

Można wykazać, że prawdziwy jest związek

$$|BE-CE|=AD\cdot\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)-1},$$

gdzie $\beta=\sphericalangle ABC$ oraz $\gamma=\sphericalangle BCD$.

---

4. Wyznacz wszystkie takie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich, że

$$a+b+(D(a,b))^2=n(a,b)=2\cdot n(a-1,b),$$

gdzie $n(a,b)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, a $D(a,b)$ — największy wspólny dzielnik liczb a, b.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że liczba $a-1$ jest dzielnikiem liczby $2n(a-1,b)=n(a,b)$, czyli w szczególności jest dzielnikiem liczby ab. Jednak liczby $a-1$ i a są względnie pierwsze, skąd wniosek, że $a-1$ dzieli b i w konsekwencji $n(a-1,b)=b$.

Przyjmijmy oznaczenie $d=D(a,b)$ oraz $k=a/d$, $l=b/d$. Ponieważ $ab=n(a,b)D(a,b)$, czyli $d^2kl=d\cdot D(a,b)$, więc $D(a,b)=dkl$ i równość $2n(a-1,b)=n(a,b)$ przybiera postać $2dl=dkl$, skąd $k=2$. Równość $a+b+(D(a,b))^2=n(a,b)$ można więc przepisać równoważnie jako

$$2d+dl+d^2=2dl,\quad \text{czyli}\quad d+2=l.$$

Łącząc uzyskane zależności, otrzymujemy $a=2d$ oraz $b=d(d+2)$. Podzielność $a-1|b$ zapisuje się więc jako $2d-1|d(d+2)$. Wobec tego liczba $2d-1$ jest także dzielnikiem liczby

$$4d(d+2)-(2d-1)(2d+5)=5.$$

Stąd uzyskujemy $d=1$ lub $d=3$ oraz odpowiednio pary (a,b): $\mathbf{(2,3)}$ lub $\mathbf{(6,15)}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obie znalezione pary spełniają warunki zadania.

---

5. Wyznacz najmniejszą liczbę rzeczywistą p o tej własności, że nierówność

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}\leqslant p\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right) \qquad (*)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że najmniejszą taką liczbą p jest 1.

Dla $a=b$ obie strony rozważanej nierówności są równe zeru, więc w tym przypadku nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby p. W dalszej części rozwiązania założymy, że $a\neq b$.

Zauważmy, że lewa strona nierówności $(*)$ jest równa $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$. Ponadto dla każdej pary różnych liczb a,b mamy $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$. Po podzieleniu nierówności $(*)$ stronami przez dodatni czynnik $\frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$ otrzymujemy równoważną nierówność

$$2\sqrt{ab}\leqslant p(a+b). \qquad (**)$$

Dla $p=1$ nierówność jest spełniona dla każdych liczb a, b, gdyż $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Przypuśćmy teraz, że $p<1$. Wówczas $1-p$ jest liczbą dodatnią. Przyjmijmy $a=1$ oraz $b=(1+\sqrt{1-p})^2$. Wówczas oczywiście $a+b>1$. Wobec tego

$$a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(1-\left(1+\sqrt{1-p}\right)\right)^2=\left(\sqrt{1-p}\right)^2=1-p<(1-p)(a+b).$$

Stąd $p(a+b)<2\sqrt{ab}$, co oznacza, że dla tak dobranych liczb a, b nierówność $(**)$ nie zachodzi.

---

6. Wierzchołki sześcianu ponumerowano liczbami 1, 2, 3, …, 8. Następnie każdej krawędzi tego sześcianu przypisano iloczyn numerów wierzchołków, między którymi znajduje się dana krawędź. Wyznacz największą możliwą wartość sumy dwunastu liczb przypisanych krawędziom.

Szkic rozwiązania

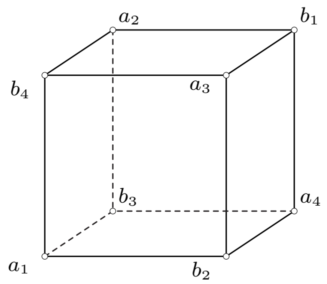
Oznaczmy numery wierzchołków przez a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, jak pokazano na rysunku 7. Suma dwunastu liczb przypisanych krawędziom jest wówczas równa

$$\begin{aligned} &a_1b_2+a_1b_3+a_1b_4+a_2b_1+a_2b_3+a_2b_4+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_4+a_4b_1+a_4b_2+a_4b_3=\\ &\qquad=(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4).\end{aligned}$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną wynika, że

$$\sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4}{2}=\frac{36}{2}=18,$$

skąd $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)\leqslant 18^2=324$.



rys. 7

Udowodnimy, że $S=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\geqslant 1\cdot 8+2\cdot 7+3\cdot 6+4\cdot 5=60$. Przypuśćmy, że liczby 1 oraz 8 nie znajdują się w tej samej parze (a_i,b_i), $i=1,2,3,4$. To oznacza, że w sumie S pewne dwa składniki mają postać $1\cdot k$ oraz $8\cdot l$, gdzie $1<k<8$, $1<l<8$. Zauważmy, że zamiana par $(1,k)$, $(8,l)$ na $(1,8)$, (k,l) powoduje zmniejszenie wartości sumy S, gdyż

$$8+kl-(k+8l)=(k-8)(l-1)<0.$$

Wobec tego najmniejsza wartość sumy S będzie osiągana wówczas, gdy w jednej z par (a_i,b_i) znajdą się liczby 1 i 8. Rozumując analogicznie, możemy kolejno uzasadnić, że jeśli liczby 2 i 7, 3 i 6 oraz 4 i 5 nie tworzą pary (a_i,b_i), to można tak zamienić niektóre liczby w obrębie par, że wartość zmniejszy się, a opisane wyżej pary liczb znajdą się w tych samych parach (a_i,b_i). To dowodzi postulowanej nierówności $S\geqslant 60$.

Znalezione oszacowania pozwalają stwierdzić, że szukana suma dwunastu liczb przypisanych krawędziom jest nie mniejsza od liczby $324-60=\mathbf{264}$. Pozostaje zauważyć, że wartość ta jest osiągana, gdy $a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$ oraz

$$\{\{a_1,b_1\},\{a_2,b_2\},\{a_3,b_3\},\{a_4,b_4\}\}=\{\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}\},$$

czyli na przykład dla następującego układu numerów wierzchołków sześcianu: $a_1=1$, $b_1=8$, $a_2=7$, $b_2=2$, $a_3=6$, $b_3=3$, $a_4=4$, $b_4=5$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku