# V Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Fačkovské sedlo (Słowacja), 16 maja 2016 — Zawody indywidualne

## Szkice rozwiązań zadań

**1.** Dany jest odcinek $AB$, którego środkiem jest punkt $M$. Rozważmy zbiór trójkątów prostokątnych $ABC$ o przeciwprostokątnej $AB$. Oznaczmy przez $D$ spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka $C$, zaś przez $K$ i $L$ rzuty prostokątne punktu $D$ odpowiednio na boki $BC$ i $AC$. Wyznacz największe możliwe pole czworokąta $MKCL$.

*Szkic rozwiązania*

*Sposób* I

Niech $P$ będzie punktem przecięcia odcinków $CM$ i $KL$ (rys. 1). Skoro $MC = MB$, to

$$\sphericalangle PCK = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MBC = \sphericalangle DBC.$$

Ponadto, czworokąt $CKDL$ jest prostokątem, więc

$$\sphericalangle CKP = \sphericalangle CKL = \sphericalangle KCD = \sphericalangle BCD.$$

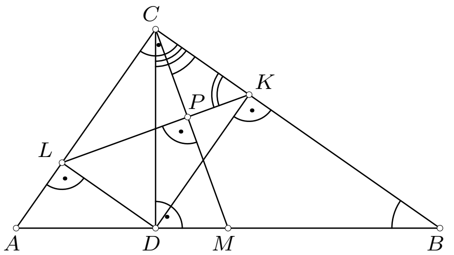
Powyższe dwie równości kątów oznaczają, że trójkąty $CPK$ oraz $BDC$ są podobne (cecha kąt–kąt), a stąd $\sphericalangle CPK = 90°$, czyli proste $KL$ oraz $CM$ są prostopadłe. To oznacza, że pole czworokąta $MKCL$ jest równe

$$\frac{1}{2}\cdot CM\cdot KL = \frac{1}{2}\cdot CM\cdot CD.$$

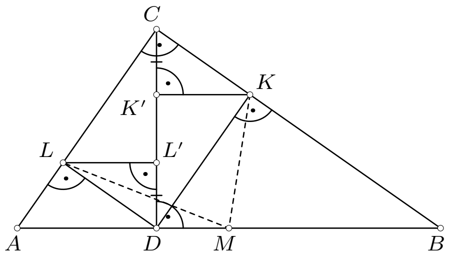
Zauważmy, że zachodzi nierówność $CD \leqslant CM$, a zatem

$$\frac{1}{2}\cdot CM\cdot CD \leqslant \frac{1}{2}\cdot CM^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{8}.$$

Pozostaje stwierdzić, że równość ma miejsce gdy $M = D$, czyli gdy trójkąt $ABC$ jest równoramienny. To oznacza, że szukane największe pole jest równe $\frac{1}{8}AB^2$.




rys. 1




rys. 2

*Sposób* II

Oznaczmy przez $K'$ i $L'$ rzuty prostokątne odpowiednio punktów $K$ i $L$ na odcinek $CD$ (rys. 2). Zauważmy, że wówczas odcinki $DK'$ i $DL'$ mają długości równe wysokościom odpowiednio trójkątów $BMK$ i $AML$ oraz $DK' + DL' = DK' + CK' = CD$. Stąd

$$[AML] + [BMK] = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot DL' + \frac{1}{2}\cdot BM\cdot DK' = \frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\cdot CD = \frac{[ABC]}{2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. W konsekwencji

$$[CKML] = [ABC] - [AML] - [BMK] = \frac{[ABC]}{2}.$$

Zatem pole czworokąta $CKML$ jest największe gdy pole trójkąta $ABC$ jest największe, a to ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $AC = BC$. Wówczas $[ABC] = \frac{1}{4}AB^2$, skąd $[CKML] = \frac{1}{8}AB^2$.

*Odpowiedź:* Największe możliwe pole czworokąta $ABCD$ jest równe $\mathbf{\frac{1}{8}AB^2}$.

**2.** Dane są liczby rzeczywiste $x$, $y$, spełniające warunek $x^2+y^2-1<xy$. Udowodnij, że $x+y-|x-y|<2$.

*Szkic rozwiązania*
*Sposób* I
Z uwagi na symetrię możemy bez straty ogólności założyć, że $x \leqslant y$. Wówczas teza zadania przybiera postać $x<1$.

Załóżmy nie wprost, że $x \geqslant 1$. Wówczas również $y \geqslant x \geqslant 1$, skąd $xy \geqslant 1$. Ponadto, dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność $(x-y)^2 \geqslant 0$. Dodając stronami ostatnie dwie nierówności, otrzymujemy $x^2+y^2-xy \geqslant 1$ wbrew założeniu o liczbach $x$, $y$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód nie wprost i rozwiązanie zadania.

*Sposób* II
Przekształcając warunek zadania równoważnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1&<xy,\\ 2x^2+2y^2-2xy&<2,\\ x^2-2x+1+y^2-2y+1+x^2-2xy+y^2&<4-2x-2y,\\ (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2&<2(2-x-y). \end{aligned}$$

Skoro kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, to $0<2-x-y$. Ponadto, $-|x-y| \leqslant 0$, gdyż wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną. Łącząc powyższe dwie nierówności, uzyskujemy $-|x-y|<2-x-y$, co jest równoznaczne z tezą zadania.

---

**3.** Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 3$, że w wierzchołkach graniastosłupa prawidłowego o podstawie $n$-kątnej można tak umieścić parami różne dodatnie liczby całkowite, aby wierzchołki o numerach $a$ i $b$ były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $a\,|\,b$ lub $b\,|\,a$.

*Szkic rozwiązania*
Oznaczmy podstawy graniastosłupa przez $A_1A_2\dots A_n$ oraz $B_1B_2\dots B_n$ w taki sposób, że $A_iB_i$ jest krawędzią graniastosłupa dla $i=1,2,\dots,n$. Ponadto, niech $a_i$, $b_i$ oznaczają odpowiednio etykiety wierzchołków $A_i$, $B_i$.

Zauważmy, że skoro numery wierzchołków są różne, dla każdej pary wierzchołków o numerach $a$ i $b$, które są połączone krawędzią, zachodzi dokładnie jedna z podzielności $a|b$, $b|a$. Bez straty ogólności załóżmy, że $a_1|b_1$. Gdyby $b_1|b_2$, to również $a_1|b_2$, więc wierzchołki $A_1$ oraz $B_2$ byłyby połączone krawędzią, a nie są. Stąd wniosek, że $b_2|b_1$. Analogicznie $a_1|a_2$, gdyż w przeciwnym przypadku zachodziłaby podzielność $a_2|b_1$, a $A_2$ i $B_1$ nie są połączone krawędzią. Podobnie dochodzimy do wniosku, że $b_2|a_2$.

Powtarzając analogiczne rozumowanie dla kolejnych ścian bocznych graniastosłupa, dochodzimy do wniosku, że kierunki podzielności na krawędziach $A_iB_i$ występują na zmianę, tzn. $a_3|b_3$, $b_4|a_4$ itd. To oznacza, że $n$ jest liczbą parzystą.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $n=2k$, to można wskazać takie etykietowanie wierzchołków graniastosłupa, że warunki zadania są spełnione. Niech $p_1$, $p_2$, $\dots$, $p_{2k}$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Przyjmijmy $a_i=p_i$ dla $i=1,3,\dots,2k-1$, $b_i=p_i$ dla $i=2,4,\dots,2k$ oraz każdemu z pozostałych wierzchołków przypiszmy liczbę, która jest iloczynem trzech liczb pierwszych z sąsiednich wierzchołków, tzn.

$$b_i=b_{i-1}a_ib_{i+1}=p_{i-1}p_ip_{i+1} \quad \text{oraz} \quad a_j=a_{j-1}b_ja_{j+1}=p_{j-1}p_jp_{j+1}$$

dla nieparzystych $i$ oraz parzystych $j$ (gdzie w razie potrzeby przyjmujemy $a_0=a_n$, $a_{n+1}=a_1$, $b_0=b_n$, $b_{n+1}=b_1$, $p_0=p_n$, $p_{n+1}=p_1$). Łatwo zauważyć, że warunki zadania są wówczas spełnione.

*Odpowiedź:* Żądaną własność mają wszystkie liczby parzyste $n \geqslant 4$.

---

**4.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $AB < AC < BC$. Na odcinkach $AC$ i $BC$ wybrano odpowiednio takie punkty $K$ i $L$, że $AB = CK = CL$. Symetralne odcinków $AK$ i $BL$ przecinają prostą $AB$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Odcinki $KP$ i $LQ$ przecinają się w punkcie $M$. Udowodnij, że $AK + KM = BL + LM$.

*Szkic rozwiązania*

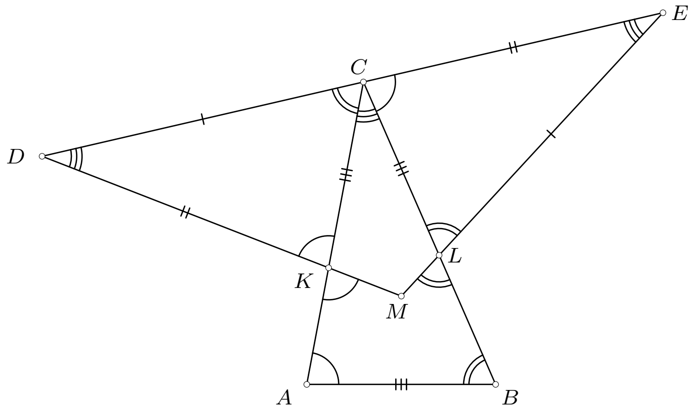
Oznaczmy na półprostych $MK^{\rightarrow}$ i $ML^{\rightarrow}$ odpowiednio takie punkty $D$ i $E$, że $KD = AC$ oraz $LE = BC$ (rys. 3). Ponieważ $\sphericalangle DKC = \sphericalangle AKM = \sphericalangle KAB$, $KD = AC$ oraz $CK = AB$, więc trójkąty $KCD$ i $ABC$ są przystające (cecha bok–kąt–bok). Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty $CLE$ i $ABC$ są przystające. Skoro

$$\sphericalangle DCK + \sphericalangle KCL + \sphericalangle LCE = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ,$$

to punkt $C$ należy do odcinka $DE$. Wobec tego, skoro $\sphericalangle KDC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CEL$, to trójkąt $MDE$ jest równoramienny i $MD = ME$. Zauważmy, że

$$AK + KM = AC + KM - CK = KD + KM - CK = MD - CK,$$
$$BL + LM = BC + LM - CL = LE + LM - CL = ME - CL.$$

Z równości $MD = ME$ i $CK = CL$ wynika, że prawe strony powyższych związków są równe. Wobec tego ich lewe strony także są równe, czyli $AK + KM = BL + LM$.



rys. 3

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 37 | 38 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 39 | 40 | 41 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 42 | 43 | 44 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 45 | 46 | 47 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 48 | 49 | 50 |
| 96 | 91 | 86 | 81 | 76 | 71 | 66 | 51 | 52 | 53 |
| 97 | 92 | 87 | 82 | 77 | 72 | 67 | 54 | 55 | 56 |
| 98 | 93 | 88 | 83 | 78 | 73 | 68 | 57 | 58 | 59 |
| 99 | 94 | 89 | 84 | 79 | 74 | 69 | 60 | 61 | 62 |
| 100 | 95 | 90 | 85 | 80 | 75 | 70 | 63 | 64 | 65 |

rys. 4

**5.** Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $j$ o tej własności, że można wypełnić pola tablicy $10 \times 10$ liczbami naturalnymi od 1 do 100 w taki sposób, że każde 10 kolejnych liczb naturalnych leży wewnątrz pewnego kwadratu $j \times j$ złożonego z pól tablicy.

*Szkic rozwiązania*

Przypuśćmy, że szukana najmniejsza liczba $j$ jest nie większa od 4 oraz rozważmy takie wpisanie liczb w pola kwadratu, aby warunki zadania były spełnione. Oznaczmy przez $a$, $b$, $c$, $d$ cztery liczby wpisane w narożne pola kwadratu w taki sposób, że $a < b < c < d$.

Ponieważ, w myśl warunków zadania, każda z liczb $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $a+9$ znajduje się w tym samym kwadracie $j \times j$, co $a$, więc $b \geqslant a + 10 \geqslant 11$. Analogicznie uzasadniamy, że $b \leqslant 80$.

Skoro jedynym kwadratem $j \times j$ zawierającym pole z liczbą $b$ jest pewien narożny kwadrat tablicy, to każda z liczb $b-9$, $b-8$, $\ldots$, $b-1$, $b$, $b+1$, $\ldots$, $b+8$, $b+9$ musi znajdować się w tym kwadracie. Jednak tych liczb jest $19 > 16 \geqslant j^2$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $j \geqslant 5$.

Pozostaje podać przykład sposobu wpisania liczb od 1 do 100 w taki sposób, że każde dziesięć kolejnych liczb naturalnych znajduje się wewnątrz pewnego kwadratu $5 \times 5$ (rys. 4).

*Odpowiedź:* Najmniejszą liczbą $j$ o żądanej własności jest **5**.


MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku