VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Szczyrk (Polska), 15 maja 2017 — Zawody indywidualne

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

Szkice rozwiązań zadań

1. Znajdź największą liczbę naturalną $n \geqslant 3$, dla której istnieje n-cyfrowa liczba $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$, której cyfry a_1, a_2 i a_n są niezerowe i która jest podzielna przez $\overline{a_2 a_3 \ldots a_n}$.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że warunki zadania są spełnione dla pewnej liczby $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ i przyjmijmy

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \quad \text{oraz} \quad B = \overline{a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

Liczba B jest dzielnikiem liczby A wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby

$$A - B = a_1 \cdot 10^{n-1} = a_1 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}.$$

Skoro $a_n \neq 0$, to liczba B nie może mieć jednocześnie liczb 2 oraz 5 w rozkładzie na czynniki pierwsze, a zatem jest postaci $a \cdot 2^k$ lub $a \cdot 5^k$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n-1$ oraz a jest dzielnikiem a_1. Stąd wynika, że $B \leqslant 9 \cdot 5^{n-1}$. Z drugiej strony, liczba B ma $n-1$ cyfr, a zatem $B \geqslant 10^{n-2}$. Łącząc te dwie nierówności, uzyskujemy

$$10^{n-2} \leqslant 9 \cdot 5^{n-1}, \quad \text{czyli} \quad 2^{n-2} \leqslant 45.$$

Ponieważ $2^5 = 32 < 45 < 64 = 2^6$, więc wynika z tego, że $n \leqslant 7$.

Pozostaje zauważyć, że liczba $9 \cdot 5^6 = 140625$ jest sześciocyfrowa i jest dzielnikiem siedmiocyfrowej liczby 9140625. Stąd wniosek, że szukaną największą wartością jest $n = 7$.

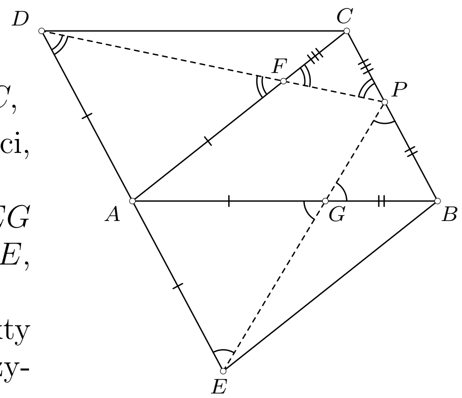
Uwaga

Innym przykładem pary (A, B) pozwalającej zrealizować $n = 7$ jest $B = 7 \cdot 5^6 = 109375$ oraz $A = 7109375$. W połączeniu z podanym w rozwiązaniu są to jedyne dwie takie pary — dla innych wyborów a, k spełniających zadane warunki liczby $a \cdot 2^k$ oraz $a \cdot 5^k$ (czyli możliwe wartości B) są co najwyżej pięciocyfrowe.

---

2. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB + AC = 3 \cdot BC$. Oznaczmy przez D, E takie punkty, że czworokąty $BCDA$ oraz $CBEA$ są równoległobokami, a przez F i G — takie punkty leżące odpowiednio na bokach AC i AB, że $AF = AG = BC$. Udowodnij, że punkt przecięcia prostych DF i EG leży na odcinku BC.

Szkic rozwiązania



Z warunków zadania wynika, że

$$BG + CF = AB - AG + AC - AF = AB + AC - 2 \cdot BC = BC,$$

wobec czego na odcinku BC istnieje punkt P o tej własności, że $BP = BG$ oraz $CP = CF$.

Skoro $\sphericalangle EAG = \sphericalangle PBG$, to trójkąty równoramienne AEG i BPG są podobne, a zatem $\sphericalangle EGA = \sphericalangle PGB$, czyli punkty E, G, P leżą na jednej prostej.

Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFP$, więc punkty D, F, P leżą na jednej prostej. Łącząc powyższe wnioski, uzyskujemy, że proste DF i EG przecinają się w punkcie P.

Uwaga

Ponieważ $AF = AG$, $BG = BP$ oraz $CP = CF$, więc F, G, P to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do jego boków.

---

3. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$(x^2+1)(y^2+1) \geqslant 2(xy-1)(x+y).$$
Dla jakich par liczb całkowitych x, y w powyższej nierówności zachodzi równość?

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że
$$(x^2+1)(y^2+1) = x^2y^2+x^2+y^2+1 = x^2y^2-2xy+1+x^2+2xy+y^2 = (xy-1)^2+(x+y)^2.$$
Wobec tego daną nierówność można przekształcić równoważnie do postaci
$$(xy-1)^2-2(xy-1)(x+y)+(x+y)^2 \geqslant 0, \quad \text{czyli} \quad (xy-1-x-y)^2 \geqslant 0.$$
Ostatnia nierówność jest oczywiście spełniona, co kończy dowód.

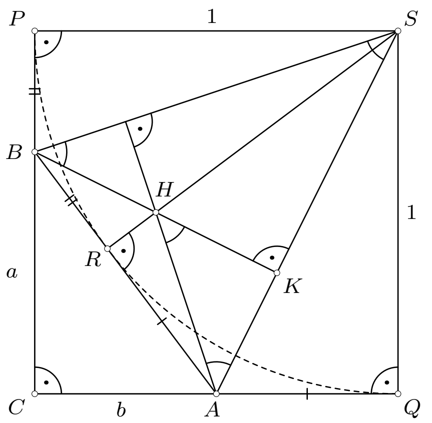
Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi w nierówności wyjściowej, czyli gdy
$$xy-1-x-y=0 \quad \text{lub równoważnie} \quad (x-1)(y-1)=2.$$
Jedynymi przedstawieniami liczby 2 w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych są
$$1\cdot 2 = 2\cdot 1 = (-1)\cdot(-2) = (-2)\cdot(-1).$$
To prowadzi do następujących par (x,y): $(2,3)$, $(3,2)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

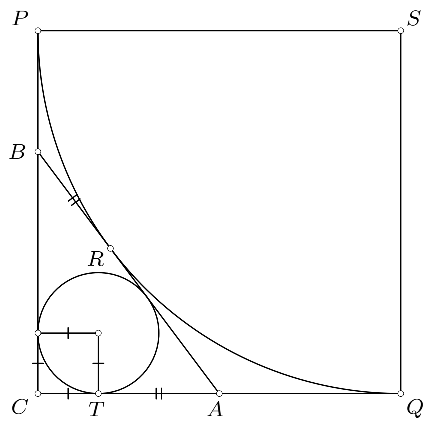
---

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o obwodzie 2, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt S jest środkiem okręgu dopisanego do boku AB tego trójkąta, a punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABS. Wyznaczyć najmniejszą możliwą długość odcinka HS.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez P, Q, R punkty styczności danego okręgu dopisanego odpowiednio z prostymi BC, CA, AB. Skoro $CP=CQ$ oraz
$$\sphericalangle SQA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BPS = 90^\circ,$$
to czworokąt $SPCQ$ jest kwadratem. Co więcej, ponieważ $AR=AQ$ oraz $BR=BP$, więc
$$AC+AR = AC+AQ = CQ = CP = AB+BP = AB+AR,$$
a zatem obie strony powyższej równości są równe 1, gdyż sumują się do obwodu trójkąta ABC. Stąd $SP=SQ=SR=1$.





Ponieważ proste SR i AB są prostopadłe, więc punkt H należy do prostej SR. Ponadto, skoro $AQ=AR$ i $BP=BR$, to AQS i ARS oraz BPS i BRS to pary trójkątów przystających (cecha bok–kąt–bok), wobec czego
$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASR + \sphericalangle BSR = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle QSR + \sphericalangle PSR) = 45^\circ.$$
Oznaczmy przez K rzut prostokątny punktu B na prostą AD. Wówczas, ponieważ trójkąty prostokątne BKS i AKH są równoramienne, więc $KB=KS$ i $AK=HK$, a zatem trójkąty AKB i HKS są przystające (cecha bok–kąt–bok) i w konsekwencji $AB=HS$.

Rozwiązanie dokończymy dwoma sposobami.

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia $a=BC$ oraz $b=AC$. Warunki zadania można wówczas przepisać jako $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=2$, przy czym chcemy zminimalizować wartość $\sqrt{a^2+b^2}$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową uzyskujemy:

$$2=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 2\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sqrt{2}+1),\text{ skąd } HS=AB\geqslant\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-2.$$

Równość w nierówności między średnimi zachodzi dokładnie wtedy, gdy $a=b$, więc uzyskane minimum jest osiągane wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny.

Sposób II

Oznaczmy przez T punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boku AC. Wówczas $AT=BR$ (por. drugi obrazek w pierwszym wierszu plakatu SEM *Równe odcinki*), więc

$$TQ=AT+AQ=AR+BR=AB.$$

To oznacza, że najmniejsza możliwa długość odcinka HS będzie osiągnięta wtedy, gdy odcinek CT, równy promieniowi okręgu wpisanego w ABC, będzie miał największą możliwą długość. Będzie tak wówczas, gdy okrąg wpisany w ABC będzie styczny do danego okręgu dopisanego, czyli gdy $AC=BC=AB/\sqrt{2}$, co prowadzi do szukanego maksimum równego $2\sqrt{2}-2$.

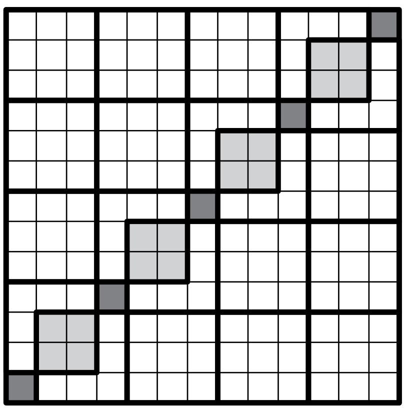
---

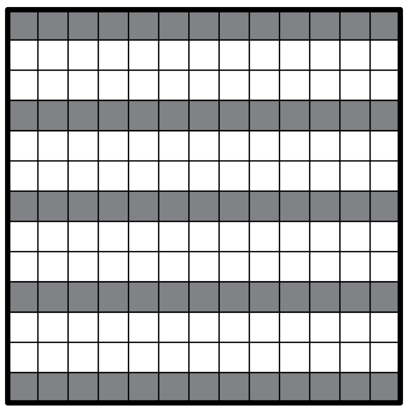
5. W każde pole tablicy $(mn+1)\times(mn+1)$ wpisano liczbę rzeczywistą z przedziału $[0,1]$ w taki sposób, że suma liczb wpisanych w pola każdego kwadratu $n\times n$ jest równa n. Znajdź największą możliwą sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że tablicę można pokryć przy użyciu $m(m+1)$ kwadratów o wymiarach $n\times n$ oraz $m+1$ kwadratów jednostkowych w taki sposób, że każde pole tablicy należy do co najmniej jednego z tych kwadratów (rysunek po lewej stronie ilustruje odpowiednie pokrycie dla $m=4$ oraz $n=3$). Z warunków zadania wynika więc, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest nie większa od

$$m(m+1)\cdot n+(m+1)\cdot 1=(m+1)(mn+1).$$





Z drugiej strony, wartość $(m+1)(mn+1)$ jest osiągalna, na przykład jeżeli wpiszemy 1 we wszystkich polach każdego wiersza o numerze dającym resztę 1 przy dzieleniu przez n (zacieniowane na prawym rysunku) oraz 0 we wszystkich pozostałych polach.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku