VII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Karlov pod Pradědem (Czechy), 21 maja 2018 r.

Zawody indywidualne

Szkice rozwiązań zadań

1. Czy dla każdej trójki dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z istnieje czwórka liczb rzeczywistych (a,b,c,d) o tej własności, że

$$ad+bc=x, \quad ac+bd=y, \quad ab+cd=z$$

oraz jedna z liczb a, b, c, d jest równa sumie trzech pozostałych?

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z istnieje czwórka (a,b,c,d) spełniająca warunki zadania, w której $d=a+b+c$.

Podstawiając w miejsce d wartość $a+b+c$ do każdej z trzech danych równości, możemy je przepisać jako

$$(a+b)(a+c)=x, \quad (a+b)(b+c)=y, \quad (a+c)(b+c)=z\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$a+b=\sqrt{\frac{xy}{z}}, \quad a+c=\sqrt{\frac{xz}{y}}, \quad b+c=\sqrt{\frac{yz}{x}}\,,$$

co pozwala obliczyć bezpośrednio wartości a, b, c oraz d:

$$a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}-\sqrt{\frac{yz}{x}}\right), \quad b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}-\sqrt{\frac{xz}{y}}\right),$$

$$c=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}-\sqrt{\frac{xy}{z}}\right), \quad d=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}\right).$$

Tak wyznaczone liczby a, b, c, d istotnie spełniają warunki zadania.

---

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, którego boki AB i DE są równoległe. Każda z przekątnych AD, BE, CF dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych obwodach. Wykaż, że te trzy przekątne przecinają się w jednym punkcie.

Szkic rozwiązania

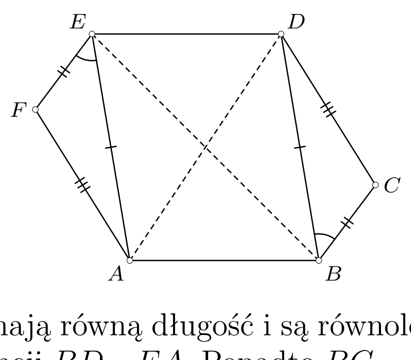
Z treści zadania wynika, że

$$AB+BC+CD+AD=AD+DE+EF+FA, \quad \text{czyli} \quad AB+BC+CD=DE+EF+FA$$

i podobnie $BC+CD+DE=EF+FA+AB$. Odejmując te dwie równości stronami, uzyskujemy

$$AB-DE=DE-AB, \quad \text{skąd} \quad AB=DE.$$

Analogicznie wykazujemy, że $BC=EF$ oraz $CD=FA$.



Ponieważ odcinki AB i DE mają równą długość i są równoległe, więc czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem i w konsekwencji $BD=EA$. Ponadto $BC=EF$ oraz $CD=FA$, skąd wynika, że trójkąty BCD i EFA są przystające (cecha bok–bok–bok). Wobec tego $\sphericalangle DBC=\sphericalangle AEF$.

Proste BD i EA są równoległe, a sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły, więc proste BC i EF są równoległe. Co więcej $BC = EF$, więc czworokąt $BCEF$ jest równoległobokiem.

Czworokąty $ABDE$ oraz $BCEF$ są zatem równoległobokami, skąd wynika, że środek odcinka BE jest także środkiem każdego z odcinków AD i CF. Wobec tego te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.

---

3. Nauczycielka rozdała każdemu ze swoich 37 uczniów po 36 kredek w różnych kolorach. Okazało się, że każda para uczniów otrzymała dokładnie jedną kredkę tego samego koloru. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę różnych kolorów rozdanych kredek.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że najmniejsza możliwa liczba różnych kolorów kredek to $\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 36 = 666$.

Udowodnimy, że jeżeli przydział kredek spełnia warunki zadania, to różnych kolorów jest co najmniej 666. Przypuśćmy, że nauczycielka rozdała zestawy 36 kredek po kolei każdemu z uczniów. Pierwszy uczeń otrzymał kredki w 36 różnych kolorach. Drugi uczeń dostał jedną kredkę koloru posiadanego przez pierwszego oraz dokładnie 35 kredek w kolorach, które dotąd się nie pojawiły. Trzeci uczeń otrzymał co najwyżej dwie kredki w kolorach posiadanych przez pierwszych dwóch, a więc co najmniej 34 kredki w nowych kolorach. Ogólnie: k-ty uczeń otrzymał co najwyżej $k-1$ kredek w kolorach już przydzielonych, a więc co najmniej $37-k$ kredek w nowych kolorach. Wobec tego łączna liczba różnych kolorów rozdanych kredek jest nie mniejsza od

$$36+35+34+\ldots+1 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 37 = 666.$$

Pozostaje zauważyć, że jeżeli każdej parze uczniów zostanie przydzielony unikalny kolor kredki, a każdy uczeń dostanie kredki w kolorach odpowiadających wszystkim 36 parom, do których należy, to warunki zadania będą spełnione, a łączna liczba kolorów będzie równa liczbie par uczniów, czyli 666.

---

4. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą A o nieparzystej liczbie cyfr i o tej własności, że zarówno A, jak i liczba B powstała poprzez usunięcie środkowej cyfry liczby A, są podzielne przez 2018.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez $2n+1$ liczbę cyfr liczby A. Wówczas $n > 1$, gdyż $A \geqslant 2018$. Niech c będzie środkową cyfrą liczby A — wtedy

$$A = 10^{n+1}x + 10^n c + y,$$

gdzie liczby całkowite x, y są takie, że $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$ oraz $0 \leqslant y < 10^n$. Zgodnie z warunkami zadania mamy

$$B = 10^n x + y.$$

Liczby A i B są obie wielokrotnościami liczby 2018 wtedy i tylko wtedy, gdy liczby B oraz

$$A - B = 9 \cdot 10^n x + 10^n c = 10^n(9x+c)$$

są obie wielokrotnościami liczby 2018. Skoro $2018 = 2 \cdot 1009$, a liczba 10^n jest parzysta, to $A-B$ jest wielokrotnością 2018 wtedy i tylko wtedy, gdy $9x + c = 1009k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Udowodnimy, że jeżeli $1 \leqslant k \leqslant 8$, to tego warunku nie można pogodzić z drugim warunkiem $2018 \mid B$ — będzie to oznaczało, że $k \geqslant 9$.

Przypuśćmy że $1 \leqslant k \leqslant 8$. Z równości $9x + c = 1009k$ wynika, że $9(x - 112k) = k - c$, wobec czego $9 \mid k - c$. Z uwagi na $-8 \leqslant k - c \leqslant 8$ jest to możliwe tylko gdy $k - c = 0$, czyli $x = 112k$. Wówczas

$$B = 112k \cdot 1000 + y = 111k \cdot 1009 + k + y.$$

Ponieważ $0 \leqslant y \leqslant 999$, więc $1 \leqslant k + y \leqslant 1007$, a zatem liczba B nie jest podzielna przez 1009 (i w konsekwencji także przez 2018). Uzyskana sprzeczność oznacza, że $k \geqslant 9$.

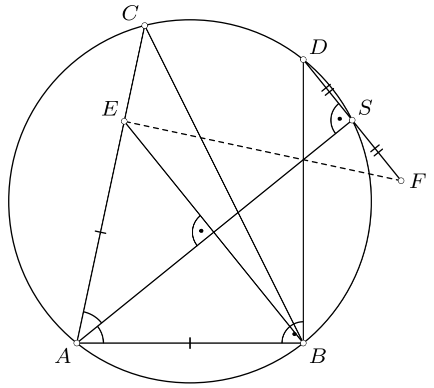
Skoro $9x+c=1009k \geqslant 1009\cdot 9$ oraz $c \leqslant 9$, to $x \geqslant 1008$, czyli $n \geqslant 4$ oraz 1008 to najmniejsza możliwa wartość liczby x, osiągana wtedy i tylko wtedy, gdy $c=k=9$. Najmniejszym przykładem liczby A podzielnej przez 2018, dla której $x=1008$ oraz $c=9$ jest

$$A=100891928=2018\cdot 49996;\quad \text{wówczas}\quad B=10081928=2018\cdot 4996.$$

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB<AC$. Punkt E leży na boku AC tego trójkąta, przy czym $AB=AE$. Odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, a punkt S jest środkiem tego łuku BC tego okręgu, do którego nie należy punkt A. Punkt F jest symetryczny do punktu D względem punktu S. Udowodnij, że proste FE oraz AC są prostopadłe.

Szkic rozwiązania

Ponieważ punkt S jest środkiem łuku BC, więc $\sphericalangle BAS=\sphericalangle SAC$. To w połączeniu z równością $AB=AE$ implikuje, że punkty B i E są symetryczne względem prostej AS. Z kolei odcinek AD jest średnicą okręgu, więc $\sphericalangle ASD=90°$. Wobec równości $SD=SF$ wnioskujemy, że także punkty D i F są symetryczne względem prostej AS.



Z powyższych ustaleń wynika, że kąt AEF jest obrazem kąta ABD w symetrii względem prostej AS, wobec czego $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABD=90°$, przy czym ostatnia równość wynika z tego, że odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku