8^{TH} Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Zuberec (Slovakia), 21^{ST} May 2019 — Team Competition

1. Jsou dána racionální čísla a, b taková, že čísla $a+b$ a a^2+b^2 jsou celá. Dokažte, že čísla a, b jsou celá.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Šachová figurka *nemocná věž* se pohybuje po řádcích a sloupcích jako obyčejná věž, ale nejvýše o 2 políčka. Nemocné věže budeme na čtvercovou šachovnici rozmísťovat tak, aby se žádné dvě z nich navzájem neohrožovaly a aby neexistovalo žádné pole ohrožené více než jednou věží.

a) Dokažte, že na šachovnici 30×30 takto nelze rozmístit více než 100 nemocných věží.

b) Určete největší možný počet nemocných věží, které lze takto rozmístit na šachovnici 8×8.

c) Dokažte, že na šachovnici 32×32 takto nelze rozmístit více než 120 nemocných věží.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o prostopadłych przekątnych, w którym $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle CBD=\sphericalangle DCA$, $AB=15$, $CD=8$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg oraz wyznacz odległość między środkiem tego okręgu a punktem przecięcia przekątnych czworokąta.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $xy+yz+zx$, gdzie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=2.$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Daný je pravidelný 360-uholník $A_1A_2\dots A_{360}$ so stredom S. Pre každý z trojuholníkov $A_1A_{50}A_{68}$ a $A_1A_{50}A_{69}$ rozhodnite, či jeho obrazy v 120 vhodných otočeniach so stredom S môžu mať (ako trojuholníky) za vrcholy všetkých 360 bodov A_1, A_2, $\dots$, A_{360}.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Na stranách AB, BC, CD, DA ležia postupne body K, L, M, N, pričom

$$|\measuredangle ADK|=|\measuredangle BCK|,\qquad |\measuredangle BAL|=|\measuredangle CDL|,$$
$$|\measuredangle CBM|=|\measuredangle DAM|,\qquad |\measuredangle DCN|=|\measuredangle ABN|.$$

Dokážte, že priamky KM a LN sú na seba kolmé.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

Time: 5 hours