SEMINARIUM OMJ
Przekształcenia algebraiczne

Dominik Burek
dominik.burek@uj.edu.pl

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że iloczyn liczb postaci a^2+b^2 dla liczb całkowitych a i b jest również tej postaci. Co można powiedzieć o iloczynie liczb postaci a^2+nb^2 dla liczb całkowitych a, b oraz dowolnej, ustalonej liczby całkowitej n?

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli $a+b+c=0$, to
$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że jeśli liczby całkowite a, b i c spełniają $ab+bc+ca=1$, to liczba
$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}$$
jest całkowita.

Zadanie 4. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d. Udowodnij, że jeżeli liczby m^2n+1 i mn^2+1 są podzielne przez d, to również liczby m^3+1 i n^3+1 są podzielne przez d.

Zadanie 5. Dana jest liczba całkowita $n>1$. Udowodnij, że
$$n^4+4^n$$
jest złożona.

Zadanie 6. Liczby rzeczywiste a, b i c spełniają równość $abc=1$. Oblicz
$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie
$$(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2=a^2+b^2-c^2,$$
to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 8. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że każda z liczb
$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$
jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n>1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 9. Liczby rzeczywiste a, b, c i d są takie, że
$$a^2+b^2+(a+b)^2=c^2+d^2+(c+d)^2.$$
Udowodnij, że
$$a^4+b^4+(a+b)^4=c^4+d^4+(c+d)^4.$$

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli liczba całkowitą n można zapisać jako sumę trzech kwadratów liczb całkowitych, to n^2 również.

Zadanie 11. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są różnymi liczbami, to

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\neq 0.$$

Zadanie 12. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych liczb całkowitych a, b, c i d, że liczby

$$a^2+2cd+b^2 \quad \text{oraz} \quad c^2+2ab+d^2$$

są kwadratami.

Zadanie 13. Udowodnij, że

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2+2.$$

Zadanie 14. Liczby rzeczywiste x i y są takie, że

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1.$$

Oblicz $x+y$.

Zadanie 15. Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi dodatnimi, że

$$ad=b^2+bc+c^2.$$

Udowodnij, że $a^2+b^2+c^2+d^2$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 16. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b i c. Udowodnij, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, że

$$(a^2+n)(b^2+n)(c^2+n)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 17. Udowodnij, że nie istnieją niezerowe liczby rzeczywiste a, b, x, y takie, że

$$\begin{cases} ax-by=16, \\ ay+bx=1. \end{cases}$$

Zadanie 18. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23, \\ a+2b+4c=22. \end{cases}$$

Zadanie 19. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=4, \\ 2xy-2x=-5. \end{cases}$$