Najlepsze Rozwiązanie

Zdalne Seminarium OMJ — 13–14 maja 2022 r.

W wielu zadaniach olimpijskich pojawia się pytanie o optymalną (najmniejszą lub największą) liczbę spełniającą zadane warunki. Aby poprawnie udowodnić, że n jest najmniejszą (odp. największą) liczbą o własności W, należy uzasadnić dwie rzeczy:

- żadna liczba mniejsza (odp. większa) od n nie ma własności W;
- liczba n ma własność W.

Te dwie części zadania są w naturalny sposób powiązane i poprawne rozumowanie w jednej z nich może ułatwić uporanie się z drugą.

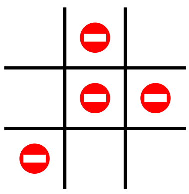
Rozgrzewka

Zadanie 1.

Jaka jest najmniejsza liczba płaskich cięć potrzebnych do pokrojenia pizzy na 8 (niekoniecznie jednakowych) kawałków?

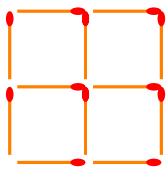
Zadanie 2.

Na planszy do gry w kółko i krzyżyk chcemy zablokować niektóre pola tak, aby uniemożliwić któremukolwiek graczowi ułożenie trzech symboli w jednej linii. Ile co najmniej pól trzeba zablokować?



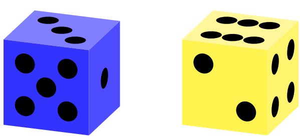
Zadanie 3.

Ile co najmniej zapałek należy usunąć z poniższego układu tak, aby nie pozostał żaden kwadrat?



Zadanie 4.

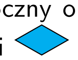
Mamy dwie standardowe sześcienne kostki do gry oraz flamaster. Ile co najmniej oczek trzeba dorysować na tych kostkach aby uniemożliwić otrzymanie sumy 7 przy rzucie obiema kostkami?

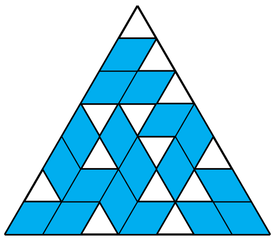


Zadanie 5.

W każdym wierzchołku sześcianu jest żarówka. Ile co najmniej żarówek musi się palić, aby oświetlać wszystkie krawędzie sześcianu? (Krawędź jest oświetlona jeśli w co najmniej jednym końcu pali się żarówka)

Zadanie 6.

Trójkąt równoboczny o boku 7 wypełniono trójkątami  i diamentami  o boku 1. Jaka jest największa możliwa liczba wykorzystanych diamentów?



Zadanie 7.

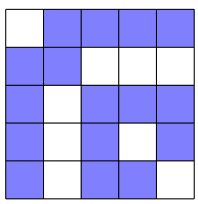
Ile co najmniej liczb trzeba usunąć ze zbioru

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

aby wśród pozostałych żadna nie była dzielnikiem innej?

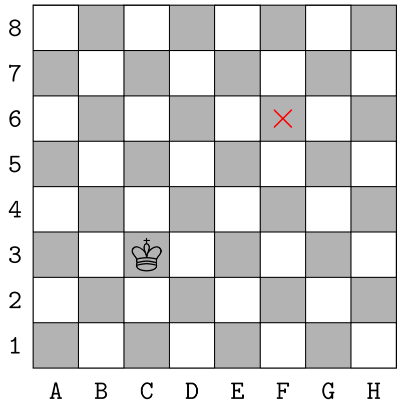
Zadanie 8.

Każde pole tablicy 5×5 jest białe albo niebieskie. Wiadomo, że w każdym kwadracie 2×2 co najmniej połowa pól jest niebieska. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w całej tablicy?



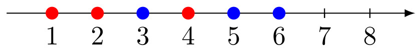
Zadanie 9.

Ile co najmniej pól należy usunąć z szachownicy aby uniemożliwić królowi szachowemu przedostanie się z pola C3 na pole F6?



Zadanie 10.

Na osi liczbowej zaznaczono punkty odpowiadające liczbom od 1 do n i każdy z nich pomalowano na czerwono albo na niebiesko. Okazało się, że jeśli trzy punkty wyznaczają dwa równe odcinki (tj. jeden z nich jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych), to nie wszystkie mają ten sam kolor. Wyznacz największą liczbę n, dla której jest to możliwe.



Zadanie 11 (4/III/XI OMG, wariacja).

Jaka jest największa liczba prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\times3\times3$, które można umieścić w prostopadłościennym pudełku o wymiarach $8\times8\times9$?

Zadania olimpijskie

Poniżej znajduje się wybór zadań pochodzących z zawodów OMJ oraz inicjatyw towarzyszących. Rozwiązania wszystkich zadań są dostępne na stronie internetowej Olimpiady.

Szkice rozwiązań zadań pochodzących z zawodów OMJ (lub OMG) są dostępne na stronie internetowej `omj.edu.pl/zadania`, a zadań pochodzących z zawodów CPSJ — pod adresem `omj.edu.pl/cpsj`. Broszura Facebookowej Ligi OMG dostępna jest tutaj: `omj.edu.pl/broszury-flomg`. Materiały z Obozów Naukowych OMJ można znaleźć na stronie: `omj.edu.pl/oboz`.

Zadanie 13/FLOMG.

Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba czarnych pól. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba białych pól w całej tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5/I/XV OMJ.

W turnieju wzięło udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij

Zadanie 3/II/XVII OMJ.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 100$ pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Zadanie 3/III/XIII OMJ.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 1000$ pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Zadanie 4/Obóz Naukowy OMJ (poziom OMJ)/2021.

Edward chce zasadzić w rzędzie 20 drzew — lipy i klony. Chce to zrobić tak, aby liczba drzew między każdymi dwoma klonami była różna od 3. Ile co najwyżej klonów może zasadzić Edward?

Zadanie 29/FLOMG.

Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczba $n+2^k$ ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze.

Zadanie 2/II/IV OMG.

Każda z liczb x_1, x_2, ..., x_{101} jest równa 1 lub -1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1.$$

Zadanie 3/I/XII OMJ.

W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb -1, 0, 1 w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5/III/XIV OMJ.

W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb -1, 0 lub 1. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5/Zawody Indywidualne/V CPSJ.

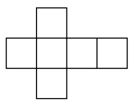
Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą j o tej własności, że można wypełnić pola tablicy 10×10 liczbami naturalnymi od 1 do 100 w taki sposób, że każde 10 kolejnych liczb naturalnych leży wewnątrz pewnego kwadratu $j\times j$ złożonego z pól tablicy.

Zadanie 4/II/VIII OMG.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3/Zawody Indywidualne/IX CPSJ.

Krzyżem nazwiemy figurę złożoną z 6 kwadratów jednostkowych przedstawioną poniżej (oraz dowolną figurę powstałą z niej przez obrót).



Wyznacz największą liczbę krzyży, które można wyciąć z kartki papieru o wymiarach 6×11 podzielonej na kwadraty jednostkowe (w taki sposób, aby każdy krzyż składał się z sześciu takich kwadratów).

Zadanie 4/Zawody Drużynowe/IX CPSJ.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że w zbiorze

$$\{70, 71, 72, \ldots, 70+n\}$$

można wskazać dwie różne liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Wskazówki do zadań 1–11.

1. Odpowiedź zależy od grubości ciasta!
2. Każdy wiersz musi mieć jakieś zablokowane pole.
3. Każda zapałka należy do dokładnie dwóch kwadratów.
4. W jaki sposób można uzyskać sumę równą 7?
5. Każda żarówka oświetla trzy krawędzie.
6. Każdy diament składa się z jednego $\triangle$ i jednego $\bigtriangledown$.
7. Spróbuj podzielić liczby na pięć par, z których każda zawiera liczbę i jej wielokrotność.
8. Spróbuj umieścić możliwie dużo kwadratów 2×2, które mają możliwie mało pól wspólnych.
9. Mniej niż 8! Spróbuj wytyczyć królowi jak najwięcej różnych ścieżek (składających się z różnych pól).
10. Odpowiedź: 9. Najpierw rozważ kolory liczb 4, 5, 6.
11. Gdyby klocki wypełniały pudełko szczelnie, to ich ściany wypełniałyby szczelnie podstawę pudełka.