STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OMG

2011 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

2011 rok

www.omg.edu.pl

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autorka rozwiązań: Urszula Swianiewicz

Recenzent: dr Waldemar Pompe

Skład komputerowy: Urszula Swianiewicz

Rysunki: Łukasz Bożyk

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-01-3

Nakład: 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Komitet Główny OMG postanowił zorganizować Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów po raz pierwszy w roku 2011, po zakończeniu VI edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Zakwalifikowano na niego najlepszych laureatów VI OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Celem Obozu było pobudzenie uczniów do wzmożonej aktywności naukowej, dzięki czemu mogliby oni, jeszcze jako uczniowie gimnazjum, spróbować swoich sił w Olimpiadzie Matematycznej (dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych) — najstarszej olimpiadzie przedmiotowej w Polsce, a także jednej z najstarszych na świecie, dającej szereg uprawnień w rekrutacji na uczelnie wyższe.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w zawodach indywidualnych. Popołudnia były poświęcone na omówienie zadań oraz odczyty o tematyce olimpijskiej. Pod koniec Obozu uczniowie rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury).

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z pełnymi rozwiązaniami) z pierwszego Obozu Naukowego OMG. Odbył się on w dniach od 29 maja do 4 czerwca 2011 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów:

Dominika Bakalarz, Szymon Batóg, Anna Czerwińska, Piotr Godlewski, Patryk Kruszynicki, Michał Kuźba, Konrad Majewski, Marcin Michorzewski, Jan Mirkiewicz, Marta Mościcka, Adam Nałęcz-Jawecki, Szymon Pajzert, Konrad Paluszek, Piotr Pawlak, Michał Prończuk, Leszek Sołdan, Beniamin Stecuła, Oskar Szymański, Ewa Wieczorek oraz Ewa Zielińska.

Kadrę Obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Jakub Oćwieja, Waldemar Pompe, Urszula Swianiewicz oraz Tomasz Szymczyk.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie
$$x^2+y^2+2x+xy+4=2y\,.$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.

3. Liczby k i m można przedstawić w postaci a^2+2b^2, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że także liczbę km można przedstawić w tej postaci.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle BAC=90^\circ$, $AB=a$, $AC=b$. Różne punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Wykaż, że obwód trójkąta DEF jest większy od
$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

5. Liczba $A>1$ jest całkowita, przy czym nie jest ona ani liczbą pierwszą, ani potęgą liczby 2. Wykaż, że liczbę A można przedstawić w postaci sumy co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

6. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b spełniona jest nierówność
$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{b^4+a^2}\leqslant\frac{1}{ab}\,.$$

7. Prostokąt rozcięto na pewną liczbę części, z których każda jest kwadratem o wymiarach 2×2 lub prostokątem o wymiarach 1×4. Następnie jeden kwadrat 2×2 wymieniono na jeden prostokąt 1×4. Wykaż, że z otrzymanych części nie można ułożyć wyjściowego prostokąta.

8. W trapezie $ABCD$ punkt S leży na podstawie AB, a punkt R leży na podstawie CD. Odcinki DS i AR przecinają się w punkcie K, a odcinki CS i BR przecinają się w punkcie L. Wykaż, że suma pól trójkątów ADK i BLC jest równa polu czworokąta $KSLR$.

9. Dane są takie liczby całkowite a, b, różne od zera, że liczba ab jest dzielnikiem liczby a^2-b^2. Udowodnij, że $|a|=|b|$.

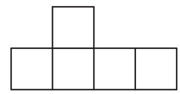
10. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Wyznacz wszystkie takie pary punktów (P,Q), leżące wewnątrz tego kwadratu, dla których
$$AP+DP+PQ+BQ+CQ=1+\sqrt{3}\,.$$

11. Rozwiąż równanie $x^3-\sqrt{x^2-4}+8=0$.

12. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększymy o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

13. Przekątne pewnego trapezu mają długości 15 oraz 20, a wysokość tego trapezu wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu.

14. Czy kwadrat o wymiarach 100×100 można rozciąć na części przystające do tej na rysunku? (Każda część składa się z pięciu kwadratów jednostkowych.) Odpowiedź uzasadnij.



15. Dany jest taki ostrosłup czworokątny $SABCD$ o podstawie $ABCD$, w którym $AS = BS = DS$ oraz

$$2\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC, \quad 2\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD, \quad 2\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSA.$$

Wiadomo także, że $\sphericalangle SAB = 2\sphericalangle SAD$. Wyznacz miarę kąta SAB.

16. Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano sześć punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

17. Czy liczbę 1 można przedstawić jako sumę odwrotności ośmiu różnych liczb naturalnych?

18. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których spełnione są równości

$$\sqrt{a}+\sqrt{b+c} = \sqrt{b}+\sqrt{c+a} = \sqrt{c}+\sqrt{a+b}.$$

19. Okrąg ω jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k, styczna do okręgu ω, przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $BP \cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k.

20. W pewnym turnieju wzięło udział n graczy. Każdy rozgegrał jeden mecz z każdym i nie było remisów. Udowodnij, że po zakończeniu turnieju wszystkich zawodników można tak ustawić w kolejce, aby każdy z nich, z wyjątkiem pierwszego, stał bezpośrednio za zawodnikiem, z którym wygrał.

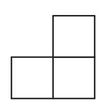
21. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Oblicz odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$.

Mecz matematyczny

22. Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których

$$p+q = (p-q)^3.$$

23. Dana jest szachownica 32×32. Po usunięciu pewnego pola okazało się, że pozostałą część tej szachownicy można pokryć klockami zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych, jak na rysunku. Które pole usunięto?



24. Czy istnieje dziesięć takich liczb naturalnych, że żadna z tych liczb nie dzieli się przez żadną z pozostałych, a kwadrat każdej z tych liczb dzieli się przez każdą z pozostałych?

25. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości trójkąta DEF pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

26. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego wysokości AD i BE. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Wykaż, że $PE = QD$.

27. Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez liczbę $6^n - 1$.

28. Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

29. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leqslant \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\,.$$

30. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach CD, DA, AB, BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym żaden z tych punktów nie pokrywa się z wierzchołkiem czworokąta. Wykaż, że jeżeli $[AKB] = [CDM]$ oraz $[BCL] = [DAN]$, to $[ABK] = [BCL]$.
Uwaga: Symbol $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

31. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

32. Piotrek i Marcin zostali wyrzuceni z zajęć. Otrzymali długopis i kartkę z napisaną liczbą 2. Co minutę wykonują następującą operację: mnożą wszystkie liczby znajdujące się na kartce, dodają liczbę 1, a następnie wpisują na kartkę największy dzielnik pierwszy otrzymanej liczby. Mogą wrócić na zajęcia dopiero wtedy, gdy na kartce pojawi się liczba 5. Czy kiedykolwiek to nastąpi? Jeśli tak, to po ilu minutach?

Rozwiązania zadań

Zawody indywidualne

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie
$$x^2+y^2+2x+xy+4=2y\,.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Po pomnożeniu danego równania stronami przez 2 i przeniesieniu wszystkich składników na jedną stronę, otrzymujemy
$$2x^2+2y^2+4x+2xy+8-4y=0.$$
Przekształcając równoważnie, dostajemy kolejno
$$x^2+4x+4+y^2-4y+4+x^2+2xy+y^2=0,$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2+(x+y)^2=0.$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, z powyższej zależności uzyskujemy $x+2=0$, $y-2=0$ oraz $x+y=0$. Stąd jedynym rozwiązaniem jest $x=-2$, $y=2$.

Sposób II

Potraktujmy wyrażenie $x^2+y^2+2x+xy+4-2y$ lub równoważnie
$$x^2+(y+2)x+y^2-2y+4$$
jako funkcję zmiennej x z parametrem y. Mamy wówczas
$$\Delta=(y+2)^2-4(y^2-2y+4)=-3y^2+12y-12=-3(y-2)^2.$$

Rozwiązanie danego równania istnieje gdy $\Delta\geqslant 0$, czyli w tym wypadku jedynie dla $y=2$. Wówczas równanie przybiera postać $x^2+4x+4=0$, czyli $(x+2)^2=0$, skąd $x=-2$.

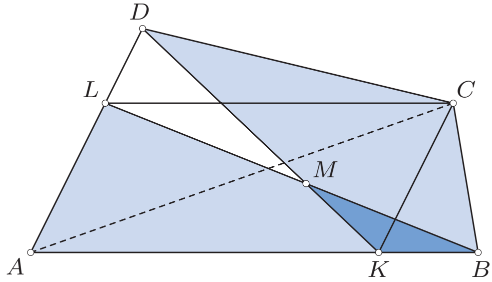
Wobec tego jedynym rozwiązaniem równania jest para $x=-2$, $y=2$.

Zadanie 2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.

Rozwiązanie

Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Trójkąty ABL i ABC mają wspólną podstawę AB oraz jednakowe wysokości opuszczone na tę podstawę (gdyż proste AB i CL są równoległe). Wobec tego trójkąty te mają równe pola. Podobnie, trójkąty ACK i DCK mają równe pola, ponieważ odcinek CK jest ich wspólną podstawą, a proste CK i AD są równoległe.



rys. 1

Korzystając uzyskanych równości pól, otrzymujemy

$$[AKML]+[BMK]=[ABL]=[ABC]=[ACK]+[CKB]=$$
$$=[DCK]+[CKB]=[DKBC]=[BCDM]+[BMK],$$

czyli $[AKML]=[BCDM]$, co należało udowodnić.

Zadanie 3. Liczby k i m można przedstawić w postaci a^2+2b^2, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że także liczbę km można przedstawić w tej postaci.

Rozwiązanie

Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi, że

$$k=a^2+2b^2 \quad \text{oraz} \quad m=c^2+2d^2.$$

Wówczas otrzymujemy

$$km=(a^2+2b^2)(c^2+2d^2)=a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+4b^2d^2=$$
$$=a^2c^2-4abcd+4b^2d^2+2b^2c^2+4abcd+2a^2d^2=(ac-2bd)^2+2(bc+ad)^2.$$

Liczby $ac-2bd$ i $bc+ad$ są całkowite, więc dowód jest zakończony.

Uwaga 1.

Możliwe jest również inne przedstawienie: $km=(ac+2bd)^2+2(ad-bc)^2$.

Uwaga 2.

Więcej na temat tożsamości wyprowadzonej w rozwiązaniu zadania można przeczytać w artykule *Tożsamość Diofantosa*, gazetka OMG *Kwadrat* nr 2, grudzień 2011 r.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle A=90°$ oraz $AB=a$, $AC=b$. Różne punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Wykaż, że obwód trójkąta DEF jest większy od

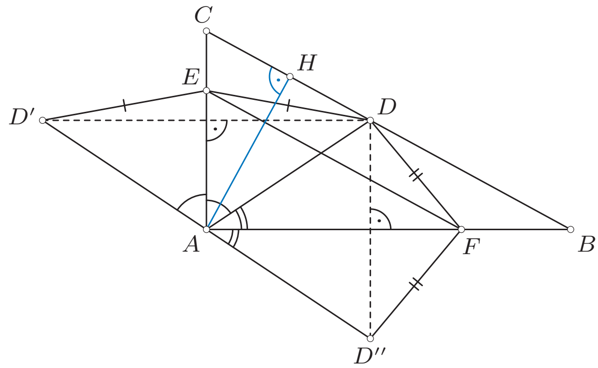
$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Rozwiązanie

Niech D' będzie obrazem punktu D w symetrii względem prostej AC. Podobnie niech D'' będzie obrazem punktu D w symetrii względem prostej AB (rys. 2). Mamy wówczas

$$\sphericalangle D'AC+\sphericalangle CAB+\sphericalangle BAD''=\sphericalangle CAD+90°+\sphericalangle DAB=180°,$$

skąd wynika, że punkty D', A, D'' leżą na jednej prostej.



rys. 2

Z nierówności trójkąta wynika, że

$$DE+EF+FD=D'E+EF+FD''\geqslant D'D=2\cdot AD\,.$$

Wystarczy więc wykazać nierówność

$$AD\geqslant\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Ponieważ punkt D leży na boku BC, więc długość odcinka AD jest nie mniejsza od wysokości AH trójkąta ABC. Ponadto

$$AH\cdot BC=2\cdot[ABC]=AB\cdot AC,$$

gdzie $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC. Stąd

$$AD\geqslant AH=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Zadanie 5. Liczba $A>1$ jest całkowita, przy czym nie jest ona ani liczbą pierwszą, ani potęgą liczby 2. Wykaż, że liczbę A można przedstawić w postaci sumy co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie

Sposób I

Liczbę A można przedstawić w postaci sumy n $(n\geqslant 3)$ kolejnych liczb całkowitych dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A=k+(k+1)+\ldots+(k+n-1)=kn+\frac{(n-1)n}{2}$$

dla pewnej liczby naturalnej $k\geqslant 1$.

Jeśli $n=2m$ $(m>1)$ jest liczbą parzystą, to ta zależność sprowadza się do $A=(2k+2m-1)m$, natomiast jeśli $n=2m+1$ $(m\geqslant 1)$ jest liczbą nieparzystą, to równość ta przybiera postać $A=(2m+1)(k+m)$.

Przypuśćmy, że liczba A nie jest ani liczbą pierwszą, ani potęgą dwójki. Wtedy $A=a\cdot b$, gdzie $a\geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą, natomiast $b\geqslant 2$ jest liczbą naturalną.

Jeśli $2b > a$, to przyjmijmy

$$k = \frac{1}{2}(2b - a + 1) \quad \text{oraz} \quad m = \frac{1}{2}(a-1).$$

Wtedy $A = (2m+1)(k+m)$, co na mocy przeprowadzonego rozumowania oznacza, że liczbę A można przedstawić w postaci sumy $2m+1$ kolejnych liczb naturalnych.

Jeśli natomiast $2b < a$, to przyjmijmy

$$k = \frac{1}{2}(a - 2b + 1) \quad \text{oraz} \quad m = b.$$

Wówczas $A = (2k + 2m - 1)m$, co podobnie jak wyżej oznacza, że liczba A jest sumą $2m$ kolejnych liczb naturalnych.

Sposób II

Liczba A nie jest pierwsza i nie jest potęgą dwójki, więc możemy ją zapisać w postaci $A = 2^k \cdot (2m+1)$ dla pewnych liczb całkowitych k, m, przy czym $k \geqslant 0$, $m \geqslant 1$.

Przyjmijmy najpierw, że $k \geqslant 1$. Liczbę A możemy zapisać w postaci

$$A = (2^k - m) + (2^k - (m-1)) + \ldots + (2^k - 1) + 2^k + (2^k + 1) + \ldots + \\ + (2^k + (m-1)) + (2^k + m). \qquad (*)$$

Zauważmy, że jeśli $2^k - m > 0$, to po prawej stronie równości $(*)$ stoją co najmniej trzy dodatnie składniki. Istotnie, liczba tych składników jest równa

$$(2^k + m) - (2^k - m) + 1 = 2m + 1 \geqslant 3.$$

Jeżeli natomiast $2^k - m \leqslant 0$, to $m - 2^k$ ujemnych składników stojących po prawej stronie równości $(*)$ zredukuje się z odpowiednimi składnikami dodatnimi. W rezultacie po redukcji tej zostanie

$$(2^k + m) - (m - 2^k) = 2^{k+1} \geqslant 4$$

składników dodatnich. W obu przypadkach liczba A została przedstawiona jako suma co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $k = 0$. Wówczas $A = 2m+1$. Ponieważ liczba A jest nieparzystą liczbą złożoną, więc możemy przedstawić ją jako iloczyn dwóch liczb nieparzystych p, q większych od 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p \leqslant q$ oraz $p = 2r+1$ dla pewnej liczby całkowitej $r \geqslant 1$. Wówczas

$$A = (q - r) + \ldots + (q - 1) + q + (q + 1) + \ldots + (q + r).$$

Ponieważ $r \geqslant 1$ oraz $q - r > 0$, więc powyższa suma zawiera co najmniej 3 składniki, z których każdy jest dodatni. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 6. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność $x^2+y^2 \geqslant 2xy$. Stąd

$$\frac{a}{a^4+b^2} \leqslant \frac{a}{2a^2b} = \frac{1}{2ab}\,.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{b}{b^4+a^2} \leqslant \frac{b}{2ab^2} = \frac{1}{2ab}\,.$$

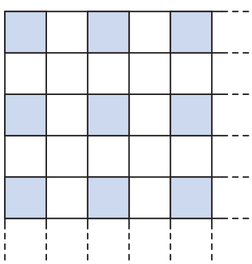
Po dodaniu obu nierówności stronami dostajemy tezę.

Zadanie 7. Prostokąt rozcięto na pewną liczbę części, z których każda jest kwadratem o wymiarach 2×2 lub prostokątem o wymiarach 1×4. Następnie jeden kwadrat 2×2 wymieniono na jeden prostokąt 1×4. Wykaż, że z otrzymanych części nie można ułożyć wyjściowego prostokąta.

Rozwiązanie

Sposób I

Podzielmy nasz prostokąt na kwadraty 1×1 (zwane dalej *polami*) i pokolorujmy niektóre z nich, jak pokazano na rysunku 3. Załóżmy, że po pocięciu danego prostokąta otrzymaliśmy k kwadratów 2×2 i l prostokątów 1×4. Wówczas każdy z uzyskanych kawałków zawiera cztery pola, przy czym kwadrat 2×2 zawiera dokładnie jedno pole zamalowane, a każdy prostokąt 1×4 zawiera 0 lub 2 pola zamalowane. W takim razie liczba wszystkich zamalowanych pól jest tej samej parzystości co liczba k.



rys. 3

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

rys. 4

Przypuśćmy, że po zamianie jednego kwadratu na prostokąt 1×4 udało nam się ułożyć wyjściowy prostokąt. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla nowego podziału prostokąta, otrzymujemy, że liczba wszystkich zamalowanych pól jest tej samej parzystości co liczba $k-1$. W konsekwencji, liczby k i $k-1$ są tej samej parzystości, co jest sprzeczne. W takim razie z otrzymanych części nie można ułożyć wyjściowego prostokąta.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I podzielmy nasz prostokąt na pola 1×1 i ponumerujmy je jak na rysunku 4. Ponieważ pole prostokąta jest liczbą naturalną podzielną przez 4, więc mamy dwa przypadki: długość co najmniej jednego z jego boków dzieli się przez 4 lub długości obu boków są parzyste, ale niepodzielne przez 4.

Rozważmy przypadek, w którym jeden z wymiarów prostokąta jest podzielny przez 4. Wówczas prostokąt ma tyle samo pól z każdym numerem.

1	2		2	3		3	4		4	1
2	3		3	4		4	1		1	2

rys. 5

Każdy prostokąt 1×4 przykrywa po jednym polu z każdym numerem. Natomiast mamy cztery rodzaje kwadratów 2×2 (rys. 5). Niech a, b, c, d będą liczbami kwadratów, które przykrywają odpowiednio dwie jedynki, dwie dwójki, dwie trójki i dwie czwórki.

Wówczas otrzymujemy, że kwadraty przykrywają $2a+b+d$ pól z numerem jeden, $a+2b+c$ pól z numerem dwa, $b+2c+d$ pól z numerem trzy i $a+c+2d$ pól z numerem d. W szczególności, skoro pokrywają tyle samo pól z każdym numerem, mamy $2a+b+d=b+2c+d$, skąd $a=c$. Analogicznie $b=d$. Zatem w sumie musimy mieć parzystą liczbę kwadratów.

Po zamianie jednego kwadratu na prostokąt, liczba kwadratów stanie się nieparzysta, więc kwadraty nie będą mogły pokrywać po tyle samo pól z każdym numerem.

W drugim przypadku przy analogicznych oznaczeniach otrzymujemy

$$2a+b+d=b+2c+d=a+2b+c-1=a+c+2d+1,$$

tzn. pól z numerem 2 jest o jedno więcej, a pól z numerem 4 o jedno mniej, niż pól z numerami 1 i 3.

Otrzymujemy stąd $a=c$ oraz $b=d+1$, a więc liczba kwadratów jest nieparzysta. Analogicznie jak w pierwszym przypadku możemy uzasadnić, że po zamianie jednego kwadratu na prostokąt, nie uda nam się pokryć całej planszy.

Zadanie 8. W trapezie $ABCD$ punkt S leży na podstawie AB, a punkt R leży na podstawie CD. Odcinki DS i AR przecinają się w punkcie K, a odcinki CS i BR przecinają się w punkcie L. Wykaż, że suma pól trójkątów AKD i BLC jest równa polu czworokąta $KSLR$.

Rozwiązanie

Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

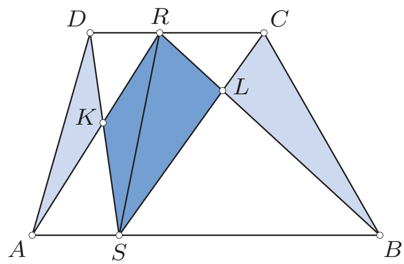
Trójkąty ASD i ASR mają wspólną podstawę AS oraz równe wysokości poprawadzone na tę podstawę (rys. 6). Wobec tego $[ASD]=[ASR]$. Po odjęciu od obu stron tej równości pola trójkąta ASK, uzyskujemy

$$[AKD]=[SKR].$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$[BLC] = [SLR].$$

Dodając stronami dwie ostatnie zależności, uzyskujemy tezę.



rys. 6

Zadanie 9. Dane są takie liczby całkowite a, b (różne od zera), że liczba ab jest dzielnikiem liczby a^2-b^2. Udowodnij, że $|a|=|b|$.

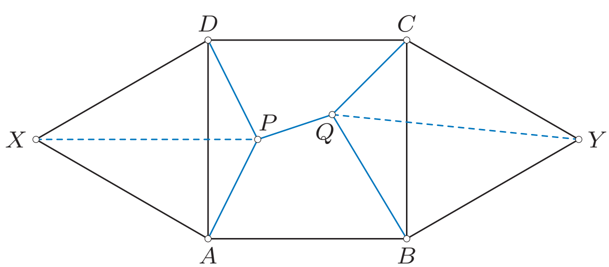
Rozwiązanie

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Wówczas mamy $a=da_1$, $b=db_1$ dla pewnych względnie pierwszych liczb a_1 i b_1. Z warunków zadania wynika, że liczba $a_1b_1d^2=ab$ jest dzielnikiem liczby $a^2-b^2=d^2(a_1^2-b_1^2)$, a stąd a_1b_1 jest dzielnikiem liczby $a_1^2-b_1^2$. Skoro a_1 dzieli liczbę $a_1^2-b_1^2$, to a_1 musi być również dzielnikiem liczby b_1^2. W takim razie $|a_1|=1$, ponieważ a_1 i b_1 są względnie pierwsze. Analogicznie $|b_1|=1$, co daje ostatecznie $|a|=|d|=|b|$.

Zadanie 10. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Wyznacz wszystkie takie pary punktów (P,Q), leżące wewnątrz tego kwadratu, dla których

$$AP+DP+PQ+BQ+CQ=1+\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie



rys. 7

Na bokach kwadratu $ABCD$, po jego zewnętrznej stronie, zbudujmy trójkąty równoboczne ADX i CBY (rys. 7). Wówczas spełnione są nierówności $DP+AP\geqslant XP$ oraz $BQ+CQ\geqslant YQ$, przy czym równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle APD=120^\circ=\sphericalangle CQB$. Dowód tego faktu można znaleźć w artykule *Nierówność trójkąta* (zadanie 4), gazetka OMG *Kwadrat* nr 2, grudzień 2011 r.

Stąd otrzymujemy

$$AP+DP+PQ+BQ+CQ \geqslant XP+PQ+YQ \geqslant XY = 1+\sqrt{3}.$$

W takim razie punkty P i Q spełniają warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy leżą wewnątrz kwadratu $ABCD$, na odcinku XY oraz

$$\sphericalangle APD = 120^\circ = \sphericalangle CQB\,.$$

Zadanie 11. Rozwiąż równanie $x^3 - \sqrt{x^2-4} + 8 = 0$.

Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że musi zachodzić nierówność $x^2-4 \geqslant 0$, która jest równoważna warunkowi $|x| \geqslant 2$.

Przypuśćmy, że $x \geqslant 2$. Wówczas

$$x^3+8 > x^3 > x > \sqrt{x^2-4}\,,$$

stąd w tym przypadku zadane równanie nie ma rozwiązań.

Rozważmy przypadek $x < -2$. Mamy wtedy $x^3 < -8$, skąd

$$x^3 - \sqrt{x^2-4} + 8 < 0,$$

więc i w tym przypadku dane równanie nie ma rozwiązań.

Pozostał przypadek $x=-2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że $x=-2$ jest rozwiązaniem. Na mocy przeprowadzonego rozumowania, jest to jedyne rozwiązanie danego równania.

Odpowiedź

Jedynym rozwiązaniem danego równania jest liczba $x=-2$.

Zadanie 12. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększymy o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

Rozwiązanie

Oznaczmy długości boków prostokąta przez x i y, przy czym $x \leqslant y$. Wtedy x jest szerokością, a y — długością danego prostokąta.

Po powiększeniu szerokości o 50% otrzymujemy prostokąt o wymiarach $1,5x \times y$. Zgodnie z warunkami zadania, szerokość prostokąta wynosi teraz $1,25x$, a zatem $y = 1,25x$. Wobec tego $1,5x$ jest długością nowego prostokąta.

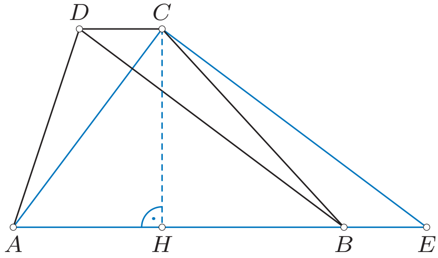
Jeśli zmniejszymy długość naszego prostokąta o 50%, to otrzymamy prostokąt o bokach x i $1,25x \cdot 0,5 = 0,625x$. Wobec tego długością stanie się bok o długości x, a to oznacza, że długość zmniejszy się o 20% (z $1,25x$ do x).

Zadanie 13. Przekątne pewnego trapezu mają długości 15 oraz 20, a wysokość tego trapezu wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu.

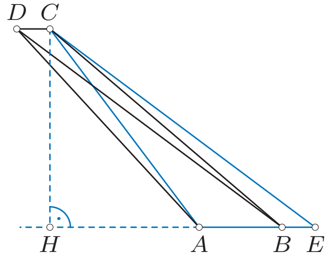
Rozwiązanie

Oznaczmy dany trapez przez $ABCD$, w taki sposób, że AB i CD to podstawy oraz $AC=15$, $BD=20$.

Niech $CDBE$ będzie równoległobokiem. Wówczas pole trapezu $ABCD$ jest równe polu trójkąta AEC. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia pola trójkąta AEC o bokach $AC=15$ i $CE=20$ oraz wysokości $CH=12$.



rys. 8



rys. 9

Takie trójkąty AEC są dwa, z dokładnością do przystawania. Mianowicie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy

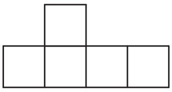
$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 9 \quad \text{oraz} \quad EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = 16.$$

W zależności od tego, czy punkt H leży na odcinku AE (rys. 8), czy poza tym odcinkiem (rys. 9), otrzymujemy

$$AE = AH + EH = 25 \quad \text{lub} \quad AE = EH - AH = 7.$$

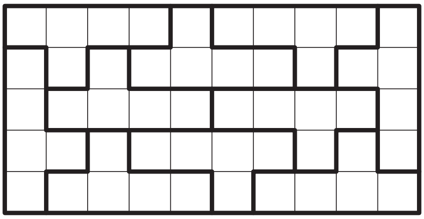
Stąd szukane pole wynosi 150 lub 42.

Zadanie 14. Czy kwadrat o wymiarach 100×100 można rozciąć na części przystające do tej na rysunku? (Każda część składa się z pięciu kwadratów jednostkowych.) Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

Częściami, o których mowa w zadaniu, można pokryć prostokąt o wymiarach 5×10 (rys. 10), więc można nimi pokryć również kwadrat o wymiarach 100×100.



rys. 10

Zadanie 15. Dany jest taki ostrosłup czworokątny $SABCD$ o podstawie $ABCD$, w którym $AS = BS = DS$ oraz

$$2\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC, \quad 2\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD, \quad 2\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSA.$$

Wiadomo też, że $\sphericalangle SAB = 2\sphericalangle SAD$. Wyznacz miarę kąta SAB.

Rozwiązanie

Oznaczmy $\sphericalangle ASB = \alpha$.

Z warunków zadania wynika, że

$$\sphericalangle BSC = 2\alpha, \quad \sphericalangle CSD = 4\alpha, \quad \sphericalangle DSA = 8\alpha.$$

Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle DSA = 8\alpha > 7\alpha = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD\,.$$

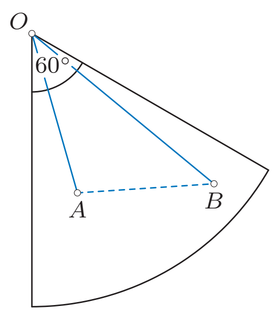
Otrzymaliśmy sprzeczność. W takim razie ostrosłup o własnościach opisanych w treści zadania nie istnieje.

Zadanie 16. Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano sześć punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że jeśli dwa punkty A i B leżą w jednym wycinku o kącie 60° koła o promieniu 1, to są odległe o co najwyżej 1.

Niech O oznacza środek koła (rys. 11). Wówczas $\sphericalangle AOB \leqslant 60^\circ$, więc w trójkącie AOB istnieje inny kąt o mierze nie mniejszej od miary kąta AOB. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to kąt OAB. Korzystając z faktu, że w trójkącie dłuższy bok leży naprzeciw większego kąta, otrzymujemy $AB \leqslant OB \leqslant 1$.



rys. 11

Podzielmy dane koło na sześć jednakowych wycinków tak, by jeden z wybranych punktów, nazwijmy go X, leżał na granicy dwóch wycinków.

Jeśli pewien punkt leży w tym samym wycinku co X, otrzymujemy tezę. W przeciwnym przypadku 5 punktów musimy umieścić w pozostałych 4 wycinkach, więc pewne dwa znajdą się w jednym wycinku, co również daje tezę.

Zadanie 17. Czy liczbę 1 można przedstawić jako sumę odwrotności ośmiu różnych liczb naturalnych?

Rozwiązanie

Wykażemy, że takie przedstawienie jest możliwe. Zauważmy, że

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Korzystając z tej równości, otrzymujemy

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.$$

Wykonując analogiczne rachunki, uzyskujemy kolejno

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48},$$
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96},$$
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}.$$

Uwaga

Istnieje wiele innych przedstawień jedynki jako sumy odwrotności ośmiu różnych liczb naturalnych, zachęcamy Czytelnika do znalezienia innego.

Zadanie 18. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których spełnione są równości

$$\sqrt{a}+\sqrt{b+c}=\sqrt{b}+\sqrt{c+a}=\sqrt{c}+\sqrt{a+b}\,.$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie pierwszą równość, otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{a}+\sqrt{b+c}=\sqrt{b}+\sqrt{c+a}\,,$$
$$a+2\sqrt{a(b+c)}+b+c=b+2\sqrt{b(c+a)}+c+a,$$
$$\sqrt{a(b+c)}=\sqrt{b(c+a)}\,,$$
$$ab+ac=bc+ba,$$
$$c(a-b)=0.$$

Uzyskujemy stąd $c=0$ lub $a=b$.

Analogicznie otrzymujemy $b=0$ lub $a=c$ oraz $a=0$ lub $b=c$.

Rozpatrzmy przypadek $c=0$ (przypadki $a=0$ i $b=0$ są analogiczne). Wówczas z wyjściowej równości dostajemy $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}\,$. Po podniesieniu do kwadratu i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy $\sqrt{ab}=0$, a stąd $a=0$ lub $b=0$. Uzyskujemy więc trójki postaci $(0,b,0)$ i $(a,0,0)$, które faktycznie spełniają równanie z zadania, podobnie jak trójka $(0,0,c)$.

W przypadku gdy wszystkie liczby są różne od 0 otrzymujemy $a=b=c$, co również okazuje się rozwiązaniem równania.

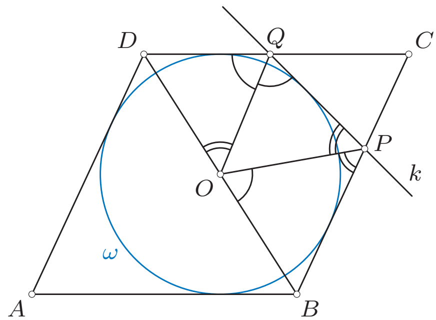
Odpowiedź

Trójka (a,b,c) spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednej z postaci $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ lub (d,d,d), gdzie a, b, c, d są liczbami nieujemnymi.

Zadanie 19. Okrąg ω jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k, styczna do okręgu ω, przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że wartość iloczynu $BP\cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k.

Rozwiązanie

Niech O oznacza środek okręgu ω (rys. 12). Punkt ten jest jednocześnie punktem przecięcia przekątnych rombu.



rys. 12

Ponieważ proste DQ i PQ są styczne do okręgu ω, więc

$$\sphericalangle DQO = \sphericalangle PQO = \alpha.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle BPO = \sphericalangle QPO = \beta.$$

Z równości $BC = CD$ otrzymujemy również, że $\sphericalangle PBO = \sphericalangle QDO = \gamma$.

Sumując kąty czworokąta $PQDB$, otrzymujemy $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$, skąd $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. W takim razie

$$\sphericalangle DOQ = 180° - \sphericalangle QDO - \sphericalangle DQO = 180° - \gamma - \alpha = \beta.$$

Z równości odpowiednich kątów otrzymujemy, że trojkąty DOQ i BPO są podobne (cecha kąt–kąt), skąd

$$\frac{DO}{DQ} = \frac{BP}{BO}.$$

W takim razie iloczyn $DQ \cdot BP$ wynosi $DO \cdot BO$, czyli jest niezależny od wyboru prostej k.

Zadanie 20. W pewnym turnieju bierze udział n graczy. Każdy rozgrywa jeden mecz z każdym i nie ma remisów. Udowodnij, że po zakończeniu turnieju wszystkich zawodników można tak ustawić w kolejce, aby każdy z nich, z wyjątkiem pierwszego, stał bezpośrednio za zawodnikiem, z którym wygrał.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy kolejkę spełniającą warunek z zadania, o najdłuższej możliwej długości k (jeżeli takich kolejek jest więcej niż jedna, wybieramy dowolną z nich). Oznaczmy zawodników stojących w kolejce przez $A_1, A_2, \ldots, A_k$, przy czym A_1 stoi na końcu kolejki, a A_k na początku. Przypuśćmy, że $k < n$, czyli rozpatrywana kolejka nie zawiera wszystkich zawodników. Niech B będzie pewnym zawodnikiem nie stojącym w kolejce.

Jeżeli zawodnik B przegrał ze wszystkimi zawodnikami stojącymi w kolejce, to w szczególności przegrał z A_k. W takim razie możemy go dostawić na początku kolejki przed A_k, tym samym ją wydłużając. Uzyskujemy kolejkę długości $k+1$, co przeczy definicji liczby k.

Przyjmijmy więc, że zawodnik B wygrał z pewnym zawodnikiem stojącym w kolejce. Niech i będzie najmniejszą liczbą, taką, że B wygrał z zawodnikiem A_i. Jeśli $i=1$, to B wygrał z A_1 i wówczas możemy ustawić zawodnika B na końcu kolejki, za A_1, ponownie ją wydłużając.

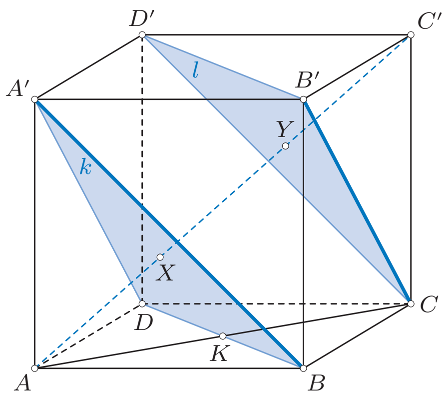
Jeśli natomiast $i>1$, to z określenia liczby i wynika, że B przegrał z zawodnikiem A_{i-1}. W takim razie możemy zawodnika B ustawić w kolejce pomiędzy zawodnikami A_{i-1} a A_i. Zatem i w tym przypadku kolejkę możemy wydłużyć.

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem $k<n$, więc $k=n$, czyli wybrana kolejka musiała zawierać wszystkich zawodników.

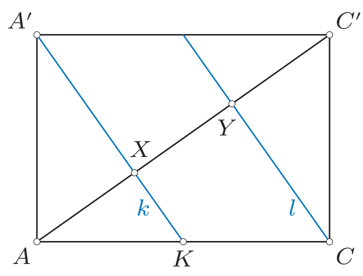
Zadanie 21. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Oblicz odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że proste $A'B$ i $B'C$ nie są równoległe, gdyż punkty A', B, B', C nie leżą na jednej płaszczyźnie. Zatem odległość między rozpatrywanymi prostymi jest równa odległości dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste. Takimi płaszczyznami są płaszczyzny k i l zawierające odpowiednio trójkąty $A'DB$ i $D'CB'$ (rys. 13). Płaszczyzny te są równoległe, ponieważ są symetryczne względem środka sześcianu.



rys. 13



rys. 14

Zauważmy, że przy obrocie sześcianu wokół przekątnej AC' o $120°$, punkt A' przechodzi na B, punkt B na D, a punkt D na A'. Wobec tego płaszczyzna $A'BD$ przechodzi przy tym obrocie na siebie, skąd wynika, że prosta AC' jest prostopadła do tej płaszczyzny. Analogicznie, prosta AC' jest prostopadła do płaszczyzny $B'CD'$.

Niech X i Y oznaczają odpowiednio punkty przecięcia prostej AC' z płaszczyznami k i l. Niech ponadto K będzie punktem przecięcia prostej AC z płaszczyzną k (jest to środek odcinka AC).

Rozpatrzmy przekrój sześcianu płaszczyzną $ACC'A'$ (rys. 14). Wówczas z równoległości płaszczyzn k i l wynika, że proste XK i YC są równoległe. Stąd z równości $AK = KA'$ otrzymujemy $AX = XY$. Analogicznie dostajemy $XY = YC'$. Wobec tego szukana odległość wynosi

$$XY = \frac{1}{3}AC' = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Mecz matematyczny

Zadanie 22. Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których

$$p+q=(p-q)^3.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Ponieważ $(p-q)^3 = p+q > 0$, więc $p > q$. Oznaczmy $n = p-q$. Wtedy n jest liczbą całkowitą, $n \geqslant 1$ oraz $p+q = n^3$. W takim razie

$$2q = (p+q)-(p-q) = n^3 - n = (n-1)n(n+1).$$

Prawa strona uzyskanej równości jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, więc jest liczbą podzielną przez 3. Wobec tego lewa strona również musi być liczbą podzielną przez 3. Stąd, ponieważ q jest liczbą pierwszą, więc $q=3$. Z równości $6=(n-1)n(n+1)$, otrzymujemy $n=2$, a zatem $p=3+2=5$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że para $(p,q)=(5,3)$ istotnie spełnia warunki zadania.

Sposób II

Zauważmy najpierw, że $(p-q)^3 = p+q > 0$, a stąd $p > q$.

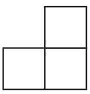
Skoro $2q = (p+q)-(p-q) = (p-q)^3 - (p-q)$, to $p-q$ dzieli $2q$. Ponieważ p i q są różnymi liczbami pierwszymi, więc na mocy algorytmu Euklidesa $\mathrm{NWD}(p-q,q) = \mathrm{NWD}(p,q) = 1$. Wobec tego $p-q$ jest dzielnikiem liczby 2.

Gdyby $p-q=1$, to mielibyśmy $p+q=1^3=1$, a ta równość nie może mieć miejsca. W takim razie $p-q=2$, a stąd $p+q=2^3=8$ i w konsekwencji

$$p = \frac{(p-q)+(p+q)}{2} = 5 \quad \text{oraz} \quad q = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} = 3.$$

Podobnie jak w sposobie I bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskana para $(p,q)=(5,3)$ istotnie spełnia warunki zadania.

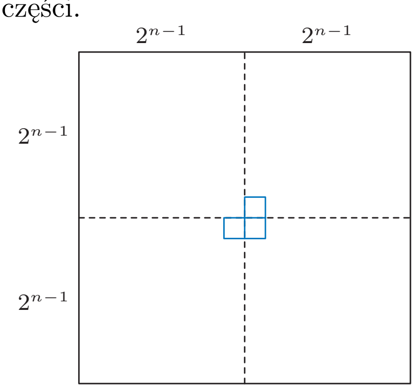
Zadanie 23. Dana jest szachownica 32×32. Po usunięciu pewnego pola okazało się, że pozostałą część tej szachownicy można pokryć klockami zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych, jak na rysunku. Które pole usunięto?



Rozwiązanie

Udowodnimy indukcyjnie, że szachownicę $2^n \times 2^n$ można pokryć klockami po usunięciu dowolnego pola. Dla $n=1$ jest to oczywiste.

Rozpatrzmy teraz szachownicę dla $n>1$ i ułóżmy jeden klocek na środku szachownicy (rys. 15). Z założenia indukcyjnego wiemy, że trzy części szachownicy jesteśmy w stanie pokryć klockami (w każdej przykryte jest dokładnie jedno, narożne pole). Czwartą część możemy pokryć pozostawiając wolne dowolne pole, a stąd umiemy pokryć całą szachownicę pozostawiając niezakryte dowolne pole czwartej części.



rys. 15

Analogicznie wykazujemy, że niezakryte może pozostać dowolne pole w innych częściach szachownicy.

Zadanie 24. Czy istnieje dziesięć takich liczb naturalnych, że żadna z tych liczb nie dzieli się przez żadną z pozostałych, a kwadrat każdej z tych liczb dzieli się przez każdą z pozostałych?

Rozwiązanie

Takie liczby istnieją. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Rozpatrzmy liczby:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{10}, \\ a_2 &= p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{10}, \\ &\ldots \\ a_{10} &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{10}^2. \end{aligned}$$

Wtedy żadna z tych liczb nie dzieli się przez żadną z pozostałych, lecz kwadrat każdej z tych liczb dzieli się przez każdą z pozostałych.

Zadanie 25. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości trójkąta DEF pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

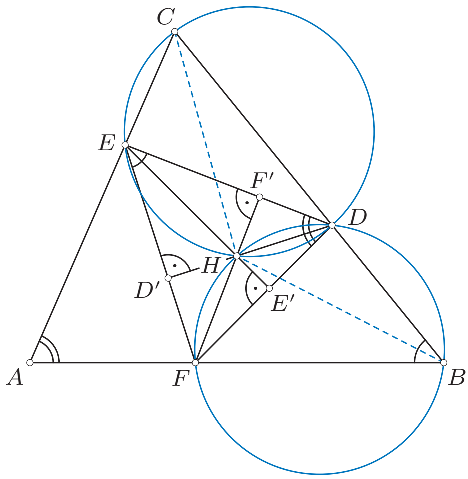
Rozwiązanie

Oznaczmy przez D', E', F' spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków D, E, F trójkąta DEF, a przez H — punkt przecięcia wysokości tego trójkąta (rys. 16).

Z sumy kątów wewnętrznych w trójkątach $D'HF$ i FEF' mamy

$$\sphericalangle D'HF = 90^\circ - \sphericalangle EFF' = \sphericalangle F'EF = \sphericalangle ABC.$$

Stąd wynika, że na czworokącie $BDHF$ można opisać okrąg. Analogicznie okrąg można opisać na czworokoącie $EHDC$.



rys. 16

Otrzymujemy stąd

$$\sphericalangle DCH = \sphericalangle DEE' = 90^\circ - \sphericalangle EDF = \sphericalangle F'FD = \sphericalangle HBD,$$

co daje $CH = BH$. Analogicznie otrzymujemy $AH = BH$, a stąd tezę.

Uwaga

Warto zastanowić się, czy trójkąty DEF o własności opisanej w treści zadania istnieją (poza przypadkiem, gdy D, E, F są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC).

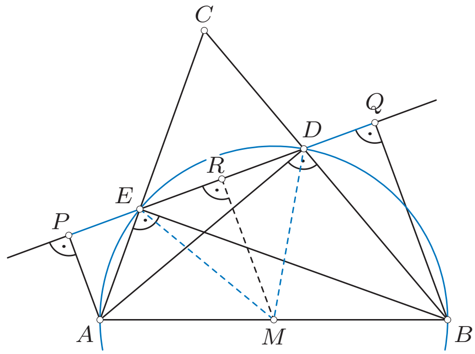
Niech H będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC oraz niech E będzie pewnym punktem na boku AC. Przypuśćmy, że okrąg opisany na trójkącie AHE przecina bok AB w punkcie F, a okrąg opisany na trójkącie BFH przecina bok BC w punkcie D. Wówczas trójkąt DEF spełnia warunki zadania. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadanie 26. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz jego wysokości AD i BE. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Wykaż, że $PE = QD$.

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem odcinka AB, a R — rzutem prostokątnym punktu M na prostą DE (rys. 17).

Ponieważ punkty D i E leżą na okręgu o średnicy AB, więc $MD = ME$. Prosta MR jest więc wysokością w trójkącie równoramiennym DEM, a zatem dzieli podstawę DE na dwa odcinki równej długości. Wobec tego $RE = RD$.



rys. 17

Proste AP, MR i BQ są równoległe oraz $AM = BM$. Stąd wniosek, że $PR = QR$. Ostatecznie otrzymujemy

$$PE = PR - RE = QR - RD = QD\,.$$

Zadanie 27. Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez liczbę $6^n - 1$.

Rozwiązanie

Załóżmy, że taka liczba całkowita dodatnia n istnieje. Ponieważ liczba $6^n - 1$ jest podzielna przez 5, więc również liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 5. Sprawdźmy, jakie reszty z dzielenia przez 5 dają potęgi liczby 7:

$$7 \equiv 2 \pmod 5\,, \quad 7^2 \equiv 4 \pmod 5\,, \quad 7^3 \equiv 3 \pmod 5\,, \quad 7^4 \equiv 1 \pmod 5\,.$$

Wobec tego dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k uzyskujemy

$$7^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5\,, \quad 7^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5\,, \quad 7^{4k+3} \equiv 3 \pmod 5\,, \quad 7^{4k+4} \equiv 1 \pmod 5\,.$$

Stąd wniosek, że jeżeli $5 \mid 7^n - 1$, to liczba n musi być podzielna przez 4.

Zauważmy jednak, że liczba $6^n - 1$ jest dla liczb parzystych n podzielna przez 7. Istotnie, jeśli $n = 2k$, to

$$6^n = 6^{2k} = 36^k \equiv 1^k = 1 \pmod 7\,.$$

Z drugiej strony, liczba $7^n - 1$ nie jest podzielna przez 7 dla dodatnich n. Stąd wniosek, że liczba n musi być nieparzysta.

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc nie istnieje taka liczba n.

Zadanie 28. Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

Rozwiązanie

Niech A i B będzie dowolną parą znajomych. Wykażemy najpierw, że osoby A i B mają wśród pozostałych taką samą liczbę znajomych.

Oznaczmy przez $A_1, A_2, \ldots, A_k$ wszystkich znajomych osoby A różnych od B oraz wybierzmy spośród nich dowolną osobę A_i. Przyporządkujemy tej osobie pewnego znajomego B_i osoby B w następujący sposób.

Osoba A_i nie zna osoby B, gdyż w przeciwnym razie para znajomych A, B miałaby wspólnego znajomego A_i. Wobec tego para nieznajomych A_i, B ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Jednym z niech jest osoba A, drugiego zaś oznaczmy przez B_i. Zauważmy, że osoba B_i jest nieznajomą osoby A; w przeciwnym razie para znajomych A, B miałaby wspólnego znajomego B_i.

Opisane przyporządkowanie, które przypisuje osobie A_i osobę B_i jest różnowartościowe. Istotnie, gdyby osobom A_i oraz A_j $(i \neq j)$ została przyporządkowana (zgodnie w powyższą regułą) ta sama osoba B_i, to wówczas para nieznajomych A, B_i miałaby trzech wspólnych znajomych: A_i, A_j oraz B. Stąd wniosek, że liczba znajomych osoby A nie przekracza liczby znajomych osoby B.

Zamieniając osoby A i B rolami, uzasadniamy analogicznie jak wyżej, że liczba znajomych osoby B nie przekracza liczby znajomych osoby A. Wobec tego osoby A i B mają taką samą liczbę znajomych.

Niech teraz A i B będą dowolnymi osobami. Jeśli się znają, to mają tyle samo znajomych, co wykazaliśmy wyżej. Jeśli natomiast się nie znają, to istnieje ich wspólny znajomy C. Zgodnie z powyższym rozumowaniem osoby A i C mają tyle samo znajomych oraz osoby C i B mają tyle samo znajomych. Wobec tego osoby A i B też mają taką samą liczbę znajomych.

W takim razie każde dwie osoby obecne na przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych, co należało wykazać.

Zadanie 29. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c} \leqslant \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\,.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że nierówność

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Rzeczywiście, przekształcając tę nierówność równoważnie, uzyskujemy $2(x-y)^2 \geqslant 0$. Korzystając z przytoczonej nierówności, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{2a+2b}{2}} = \sqrt{a+b}.$$

Analogicznie

$$\frac{\sqrt{2b}+\sqrt{2c}}{2} \leqslant \sqrt{b+c} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sqrt{2c}+\sqrt{2a}}{2} \leqslant \sqrt{c+a}.$$

Dodając stronami otrzymane nierówności, dostajemy tezę zadania.

Zadanie 30. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach CD, DA, AB, BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym żaden z tych punktów nie pokrywa się z wierzchołkiem czworokąta. Wykaż, że jeżeli

$$[ABK]=[CDM] \quad \text{oraz} \quad [BCL]=[DAN],$$

to $[ABK]=[BCL]$.

Uwaga: Symbol $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

Rozwiązanie

Lemat

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz liczba dodatnia a mniejsza od pola $ABCD$. Wówczas zbiorem takich punktów X wewnątrz czworokąta $ABCD$, że

$$[ABX]+[CDX]=a$$

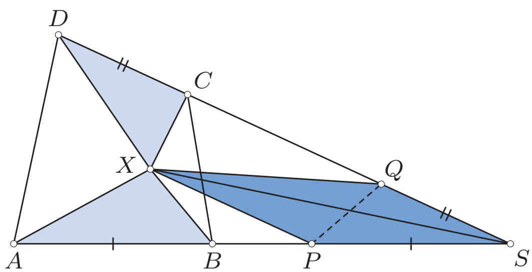
jest odcinek lub zbiór pusty. Ponadto kierunek takich odcinków nie zależy od stałej a.

Dowód lematu

Załóżmy, że proste AB i CD nie są równoległe i przecinają się w punkcie S. Niech P będzie takim punktem na półprostej SA, że $SP=AB$. Analogicznie, niech Q będzie takim punktem na półprostej SD, że $SQ=CD$ (rys. 18). Wówczas

$$a=[ABX]+[CDX]=[SPX]+[SQX]=[PSQX].$$

Załóżmy, że $a>[PSQ]$ (drugi przypadek rozważamy analogicznie). Wówczas punkt X leży po przeciwnej stronie prostej PQ niż punkt S oraz zachodzi równość $[PQX]=a-[PSQ]$. Zbiór wszystkich punktów spełniających te dwa warunki jest prostą równoległą do prostej PQ, której położenie nie zależy od wyboru liczby a. Przecięcie tej prostej z wnętrzem czworokąta $ABCD$ jest odcinkiem lub zbiorem pustym.



rys. 18

Jeżeli proste AB i CD są równolegle, to proste AD i BC przecinają się w punkcie T (założyliśmy, że czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem). Korzystając z udowodnionej już cześci lematu, wnioskujemy, że zbiór punktów X, dla których $[ADX]+[BCX]=[ABCD]-a$ (liczba po prawej stronie jest stała), jest odcinkiem lub zbiorem pustym. Dodając do obu stron powyższej równości wielkość $[ABX]+[CDX]$, otrzymujemy $a=[ABX]+[CDX]$, czyli w tym przypadku również szukany zbiór jest odcinkiem równoległym do prostej PQ lub zbiorem pustym.

Dowód lematu jest więc zakończony.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Wykażemy, że czworokąt spełniający warunki zadania jest równoległobokiem.

Przypuśćmy przeciwnie, że czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem. Ponieważ

$$[ABK]+[CDK]=[ABK]=[CDM]=[ABM]+[CDM]$$

oraz

$$[ADL]+[BCL]=[BCL]=[ADN]=[ADN]+[BCN],$$

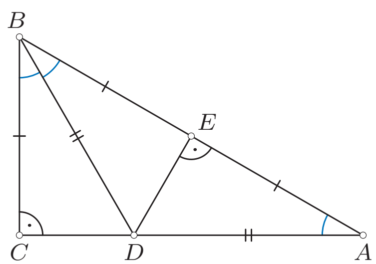
to na mocy lematu otrzymujemy $KM \parallel LN$, co jest sprzeczne z założeniem o wypukłości czworokąta $ABCD$. W takim razie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Stąd otrzymujemy $[ABK]=\frac{1}{2}[ABCD]=[BCL]$.

Zadanie 31. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

Rozwiązanie

Taki ostrosłup istnieje, podamy jego konstrukcję.

Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym, w którym $\sphericalangle ACB=90°$ oraz $\sphericalangle ABC=60°$. Niech ponadto BD będzie dwusieczną kąta ABC, a punkt E — środkiem boku AB (rys. 19). Wówczas trójkąty BCD, BED i AED są przystające i mają kąt $60°$ przy wierzchołku D.



rys. 19

Niech k będzie prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC, przechodzącą przez punkt D. Wybierzmy na prostej k, po różnych stronach płaszczyzny ABC, takie punkty X, Y, że ostrosłup o podstawie $AXCY$ i wierzchołku B ma krawędzie różnej długości. Po rozcięciu go płaszczyznami zawierającymi prostą k oraz odpowiednio punkty E i B otrzymujemy trzy czworościany przystające. W takim razie ostrosłup o podstawie $AXCY$ i wierzchołku B spełnia warunki zadania.

Zadanie 32. Piotrek i Marcin zostali wyrzuceni z zajęć. Otrzymali długopis i kartkę z napisaną liczbą 2. Co minutę wykonują następującą operację: mnożą wszystkie liczby znajdujące się na kartce, dodają liczbę 1, a następnie wpisują na kartkę największy dzielnik pierwszy otrzymanej liczby. Mogą wrócić na zajęcia dopiero wtedy, gdy na kartce pojawi się liczba 5. Czy kiedykolwiek to nastąpi? Jeśli tak, to po ilu minutach?

Rozwiązanie

W powstającym na kartce ciągu pierwszymi wyrazami będą 2 i 3. Rozpatrzmy obliczanie pewnego dalszego elementu ciągu. Po pomnożeniu wyrazów znajdujących się na kartce, Piotrek i Marcin otrzymują liczbę podzielną przez 6, a następnie dodają jeden. Stąd dzielnikiem otrzymanej liczby nie może być 2 ani 3 (w szczególności 2 nie pojawi się więcej na kartce).

W takim razie, aby na kartce pojawiła się liczba 5, wynikiem mnożenia powiększonym o 1 musi więc być liczba 5^n dla pewnego naturalnego n. Nie jest to jednak możliwe, ponieważ wówczas wynik mnożenia liczb na kartce byłby równy $5^n - 1$, a więc podzielny przez 4. Wiemy jednak, że na kartce są napisane tylko liczby pierwsze i dokładnie jedna z nich jest równa 2.

Otrzymaliśmy zatem, że liczba 5 nigdy nie pojawi się na kartce, a Piotrek i Marcin nie będą mogli wrócić na zajęcia.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie…

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści