STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OMG

2012 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom OMG
2012 rok

www.omg.edu.pl

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autorzy rozwiązań: Michał Kieza, Szymon Kubicius, Urszula Swianiewicz

Recenzent: dr Joanna Jaszuńska

Skład komputerowy: Łukasz Bożyk, Michał Kieza, Urszula Swianiewicz

Rysunki: Michał Kieza

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-03-7

Nakład: 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

`www.omg.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OMG, który odbył się w dniach 10–16 czerwca 2012 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów — młodszych klas gimnazjum, wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na finale VII edycji OMG (2011/2012):

Grzegorz Dłużewski, Karolina Grzelka, Adam Klukowski, Wiktoria Kośny, Patryk Mazgaj, Piotr Mitosek, Karol Niczyj, Paweł Piekarz, Rafał Pragacz, Tomasz Przybyłowski, Wojciech Przybyszewski, Artur Puzio, Błażej Rozwoda, Marcel Rychlewski, Marcin Sidorowicz, Jan Tabaszewski, Diana Trokowska, Wojciech Wawrów, Łukasz Wnuk oraz Szymon Zwara.

Kadrę obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Szymon Kanonowicz, Urszula Swianiewicz oraz Jarosław Wróblewski.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta równoległa do AB, przechodząca przez punkt C, przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

2. Dany jest taki trójkąt ostrokątny ABC, że $\sphericalangle ACB = 45°$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $AB = CH$.

3. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C, środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnij, że

$$AB^{2012} + BC^{2012} = AD^{2012} + DC^{2012}\,.$$

4. Ile zer znajduje się na końcu liczby 2012! zapisanej w systemie dziesiętnym?

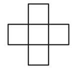
5. Wujek Jarek ma 20 torebek z cukierkami. Liczba cukierków w każdej torebce jest dodatnia i nie większa od 2012. Udowodnij, że wujek Jarek może tak obdarować Zuzię i Jaśminkę, aby każda z dziewczynek dostała taką samą liczbę torebek, zawierających łącznie taką samą liczbę cukierków.

6. Na wyspach Bergamutach podobno jest 2010 kotów w butach, 2011 uczonych łososiów, 2012 kur samograjek i 2015 starych wielorybów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta należące do różnych gatunków, to zamieniają się w dwa zwierzęta należące do dwóch pozostałych gatunków. Rozstrzygnij, czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie na wyspach Bergamutach będzie po 2012 przedstawicieli każdego gatunku.

7. Wyznacz wszystkie pary niezerowych liczb rzeczywistych (a,b) spełniające równanie

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \sqrt{3}\,.$$

8. Czy szachownicę 2014×2014 z usuniętym jednym narożnym polem można pokryć klockami 5×1 i klockami w kształcie krzyżyka jak na rysunku?



9. W trójkącie prostokątnym o bokach długości całkowitej suma ósmych potęg długości boków jest podzielna przez 127. Dowieść, że jest ona podzielna przez 127^2.

10. Dane są takie liczby x, y, z, że $x+y+z=0$ oraz $x^2+y^2+z^2=16$. Wykaż, że $x^4+y^4+z^4 \geqslant 127$.

11. Na okręgu opisano 127-kąt $A_1A_2A_3\ldots A_{127}$, którego każdy bok ma długość będącą liczbą całkowitą. Bok A_1A_2 ma długość 1 i jest styczny do okręgu w punkcie P. Udowodnij, że

$$\frac{63}{127} \leqslant A_1P \leqslant \frac{64}{127}\,.$$

12. Czy istnieje ostrosłup 127-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?

13. Wujek Szymon ma 170 torebek z cukierkami. Chce obdarować 13 dziewczynek tak, by każda otrzymała co najmniej dwie torebki. Udowodnij, że może to zrobić tak, by liczby cukierków otrzymanych przez dziewczynki były podzielne przez 13.

14. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, n, że liczby $a+b^3$, $b+c^4$ i $c+a^5$ są podzielne przez n. Udowodnij, że liczba $a^{119}-a$ również jest podzielna przez n.

15. Na szachownicy 20×20 umieszczono 48 kwadratów 2×2 tak, że każdy pokrywa 4 pola. Wykaż, że na szachownicy można umieścić jeszcze jeden kwadrat 2×2 tak, by pokrywał 4 wolne pola.

16. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i C, różnych od B. Okrąg o przechodzi przez punkty A i C i przecina okrąg o_1 w punkcie D. Prosta DB przecina okrąg o w punkcie E. Odcinek EC przecina okrąg o_2 w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt BCF jest równoramienny.

17. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od pq, dla których liczba n^3-n jest podzielna przez pq?

18. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc\,.$$

19. Ile co najwyżej skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach 100×100 tak, by żadne dwa sobie nie zagrażały?

Uwaga: Dwa skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach 2×3.

20. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i półprosta AM przecina okrąg o w punkcie E. Punkt N jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC i półprosta AN przecina okrąg o w punkcie F. Wykaż, że jeżeli odcinki ME i NF są równej długości, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.

Mecz matematyczny

21. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieje taka dodatnia liczba całkowita $n \leqslant 1000$, że liczba nx ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

22. W kole o promieniu 18 wybrano 2267 punktów. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 1 i 2, który zawiera nie mniej niż 18 spośród tych punktów.

23. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Punkty P, Q, R są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ALM, BMK, CKL. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

24. Dany jest trójkąt ABC. Punkt X należy do boku AB tego trójkąta. Wspólna zewnętrzna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty AXC i BXC, różna od prostej AB, przecina odcinek CX w punkcie Y. Wykaż, że długość odcinka CY nie zależy od wyboru punktu X.

25. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt prostokątny BCD o kącie prostym przy wierzchołku D. Punkt B jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Dane są $BD = p$, $CD = q$, $AB = s$. Oblicz promień sfery wpisanej w ten ostrosłup.

26. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $a+b+c \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc\,.$$

27. W każde pole szachownicy 13×13 wkręcono żarówkę. W jednym ruchu można zmienić stan (zapalona/zgaszona) 4 żarówek zajmujących kwadrat 2×2 lub 81 żarówek zajmujących kwadrat 9×9. Czy zaczynając od dowolnego układu można za pomocą takich ruchów zgasić wszystkie żarówki?

28. Na okręgu znajduje się $n \geqslant 4$ lamp. Przy każdej z nich znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) tej lampy i jej dwóch sąsiadów. Na początku jedna lampa jest zapalona, a pozostałe są zgaszone. Dla których n można za pomocą przełączników doprowadzić do tego, by wszystkie lampy były zgaszone?

29. Rozstrzygnij, czy jest wymierna liczba $0,11235831459\ldots$, której każda cyfra, począwszy od trzeciej po przecinku, jest cyfrą jedności sumy dwóch cyfr poprzednich.

30. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $(n^2)!$ jest podzielna przez $(n!)^{n+1}$.

31. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^4 + 4^n$ jest złożona.

Rozwiązania zadań

Zawody indywidualne

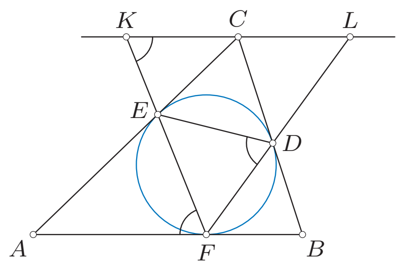
Zadanie 1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta równoległa do AB, przechodząca przez punkt C, przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Proste AB i KL są równoległe, więc z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą otrzymujemy

$$\sphericalangle LKE = \sphericalangle AFE = \sphericalangle FDE = 180^\circ - \sphericalangle LDE\,.$$

To oznacza, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg (rys. 1).



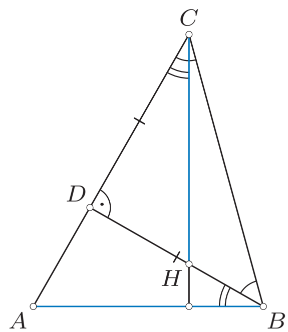
rys. 1

Uwaga

Można udowodnić, że środkiem tego okręgu jest punkt C.

Zadanie 2. Dany jest taki trójkąt ostrokątny ABC, że $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $AB = CH$.

Rozwiązanie



rys. 2

Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka B (rys. 2). Z równości $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ wynika $\sphericalangle CBD = 45^\circ$, zatem $BD = CD$. Ponadto punkt D leży na odcinku AC, gdyż trójkąt ABC jest ostrokątny, skąd mamy

$$\sphericalangle DBA = 90^\circ - \sphericalangle DAB = \sphericalangle ACH = \sphericalangle DCH\,.$$

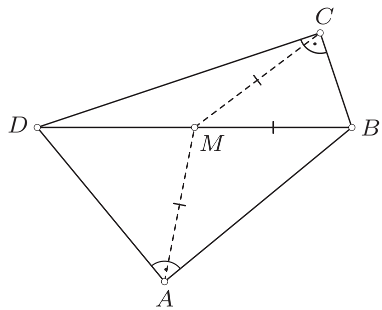
Trójkąty prostokątne BDA i CDH są więc przystające (cecha kąt–bok–kąt), skąd dostajemy $AB = CH$.

Zadanie 3. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C, środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnij, że

$$AB^{2012} + BC^{2012} = AD^{2012} + DC^{2012}.$$

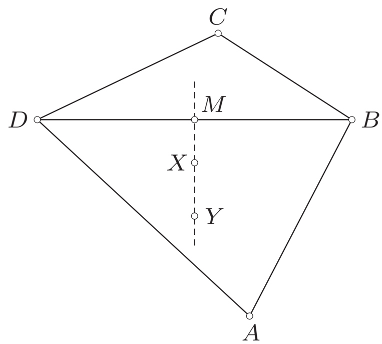
Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka BD, a przez X i Y odpowiednio środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD.



rys. 3

Załóżmy najpierw, że punkty X, Y oraz M pokrywają się (rys. 3). Wówczas kąty przy wierzchołkach A i C są proste. Ponadto $AM = BM = CM$, co wraz ze współliniowością punktów A, M, C dowodzi, że M jest także środkiem odcinka AC. Czworokąt $ABCD$ jest więc równoległobokiem mającym kąty proste przy wierzchołkach A i C, zatem musi być prostokątem. To oznacza, że $AB = CD$ i $AD = BC$, skąd natychmiast wynika teza.



rys. 4

Przyjmijmy teraz, że co najmniej jeden z punktów X i Y nie pokrywa się z punktem M (rys. 4). Wówczas te trzy punkty leżą na symetralnej odcinka BD, a więc należeć do niej muszą także punkty A i C. To zaś prowadzi do wniosku, że $AB = AD$ i $CB = CD$, co daje tezę.

Zadanie 4. Ile zer znajduje się na końcu liczby 2012! zapisanej w systemie dziesiętnym?

Rozwiązanie

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia największej takiej liczby całkowitej dodatniej n, że liczba 2012! dzieli się przez 10^n.

Obliczmy najpierw liczbę piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze iloczynu

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2011\cdot 2012\,.$$

W tym celu wyróżnijmy dokładnie jedną piątkę w każdej liczbie podzielnej przez 5. W sumie otrzymamy 402 piątki. Następnie zauważmy, że każda liczba podzielna przez 25 wnosi do rozkładu jeszcze co najmniej jedną piątkę, która nie została wyróżniona. W drugim kroku wyróżnijmy dokładnie jedną piątkę w każdej liczbie podzielnej przez 25 — otrzymamy dodatkowo 80 piątek. Podobnie postępujemy z liczbami podzielnymi przez 125, a następnie przez 625 otrzymując odpowiednio 16 i 3 dodatkowe piątki. W rozważanym iloczynie nie ma liczb podzielnych przez 3125, skąd wniosek, że wykładnik największej potęgi 5 dzielącej liczbę 2012! jest równy liczbie wyróżnionych dotąd piątek, czyli

$$402+80+16+3=501\,.$$

Z drugiej strony liczba dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 2012! jest nie mniejsza niż 1006, co oznacza, że szukana wartość liczby n jest równa 501.

Ostatecznie otrzymujemy, że liczba 2012! kończy się 501 zerami.

Zadanie 5. Wujek Jarek ma 20 torebek z cukierkami. Liczba cukierków w każdej torebce jest dodatnia i nie większa od 2012. Udowodnij, że wujek Jarek może tak obdarować Zuzię i Jaśminkę, aby każda z dziewczynek dostała taką samą liczbę torebek, zawierających łącznie taką samą liczbę cukierków.

Rozwiązanie

Spośród dwudziestu torebek możemy wybrać dziesięcioelementowy podzbiór na $\binom{20}{10}$ sposobów. Łączna liczba znajdujących się w nim cukierków nie przekracza $10\cdot 2012$. Ponieważ

$$\binom{20}{10}=184756>20120\,,$$

to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwa różne podzbiory o jednakowej liczbie cukierków. Jeśli nie są one rozłączne, to możemy z każdego z nich wyłączyć ich część wspólną. Wówczas otrzymamy dwa rozłączne podzbiory o jednakowej liczbie torebek i jednakowej liczbie cukierków, którymi wujek Jarek może obdarować obie dziewczynki.

Zadanie 6. Na wyspach Bergamutach podobno jest 2010 kotów w butach, 2011 uczonych łososiów, 2012 kur samograjek i 2015 starych wielorybów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta należące do różnych gatunków, to zamieniają się w dwa zwierzęta należące do dwóch pozostałych gatunków. Rozstrzygnij, czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie na wyspach Bergamutach będzie po 2012 przedstawicieli każdego gatunku.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie może.

Zauważmy, że przy każdym spotkaniu liczebność każdego z czterech gatunków zmienia się o jeden, a zatem zmienia się jej parzystość. W szczególności jeśli przed spotkaniem były dwa gatunki o parzystej liczebności i dwa o nieparzystej, to po spotkaniu także będą dwa gatunki o parzystej liczebności i dwa o nieparzystej.

Ponieważ na początku mamy dwa gatunki o nieparzystej liczebności i dwa gatunki o parzystej liczebności, to po każdym spotkaniu taki stan będzie zachowany. Nie dojdzie zatem nigdy do sytuacji, w której jest parzysta liczba zwierząt każdego z gatunków — po 2012.

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie pary niezerowych liczb rzeczywistych (a,b) spełniające równanie

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\sqrt{3}\,.$$

Rozwiązanie

Dane równanie możemy przekształcić do postaci

$$\left(b^2+\frac{b}{a}+\frac{1}{4a^2}\right)+\left(a^2-\sqrt{3}+\frac{3}{4a^2}\right)=0\,,$$

co z kolei można także zapisać jako

$$\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2=0\,.$$

Ostatnie równanie jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy oba składniki stojące po lewej stronie są równe zeru, czyli

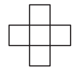
$$b=-\frac{1}{2a}\qquad\text{oraz}\qquad a=\frac{\sqrt{3}}{2a}\,. \tag{$*$}$$

Z drugiego z powyższych równań wnioskujemy, że

$$a^2=\sqrt{\frac{3}{4}}\,,$$

skąd $a=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ lub $a=-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$. Korzystając teraz z pierwszego z równań $(*)$, dostajemy odpowiednio $b=-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$ lub $b=\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$. Jedynymi rozwiązaniami równania danego w treści zadania są więc pary $\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}},-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)$ i $\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right)$.

Zadanie 8. Czy szachownicę 2014×2014 z usuniętym jednym narożnym polem można pokryć klockami 5×1 i klockami w kształcie krzyżyka jak na rysunku?



Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie można.

Możemy założyć bez straty dla ogólności, że usunięto pole znajdujące się w lewym górnym rogu. Ponumerujmy pola szachownicy liczbami 1, 2, 3, 4, 5 w sposób pokazany na rysunku (rys. 5).

Zauważmy, że każdy klocek podany w treści zadania pokrywa pięć pól z różnymi liczbami. Gdyby więc istniało żądane pokrycie, to każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5 występowałaby tyle samo razy.

Z drugiej strony bezpośrednio sprawdzamy, że tak nie jest. Mianowicie rozważaną szachownicę możemy podzielić na kwadrat o wymiarach 4×4 bez narożnego pola oraz dwa prostokąty: o wymiarach 4×2010 i 2010×2014. W kwadracie 4×4 po usunięciu narożnego pola liczby 1, 2, 3, 4, 5 występują odpowiednio 2, 3, 4, 3, 3 razy. Każdy z prostokątów można zaś podzielić na prostokąty 5×1, więc każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5 występuje w nich tyle samo razy.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	…
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	…
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	…
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	…
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	…
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	…
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	…
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	…
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

rys. 5

W takim razie poszukiwane pokrycie nie jest możliwe.

Zadanie 9. W trójkącie prostokątnym o bokach długości całkowitej suma ósmych potęg długości boków jest podzielna przez 127. Dowieść, że jest ona podzielna przez 127^2.

Rozwiązanie

Niech $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ będą długościami boków danego trójkąta, przy czym przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{z}$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy wówczas $x+y=z$. Wobec tego suma ósmych potęg długości boków jest równa

$$x^4+y^4+z^4=x^4+y^4+(x+y)^4=2x^4+2y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2=$$
$$=2(x^4+y^4+2x^3y+2xy^3+3x^2y^2)=2(x^2+y^2+xy)^2\,.$$

Ponieważ 127 jest nieparzystą liczbą pierwszą, to z powyższej równości wynika, że $127 \mid x^2+y^2+xy$. W takim razie liczba $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+xy)^2$ jest podzielna przez 127^2.

Zadanie 10. Dane są takie liczby x, y, z, że $x+y+z=0$ oraz $x^2+y^2+z^2=16$. Wykaż, że $x^4+y^4+z^4 \geqslant 127$.

Rozwiązanie

Wykażemy znacznie więcej. Udowodnimy mianowicie, że $x^4+y^4+z^4=128$, co oczywiście daje tezę.

Z pierwszej równości otrzymujemy $z=-x-y$. Zatem

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(-x-y)^2=2x^2+2y^2+2xy\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4&=x^4+y^4+(-x-y)^4=2x^4+2y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2=\\&=2(x^4+y^4+2x^3y+2xy^3+3x^2y^2)=\\&=2(x^2+y^2+xy)^2=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^2=128\,.\end{aligned}$$

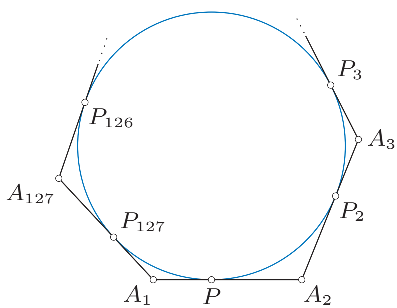
Zadanie 11. Na okręgu opisano 127-kąt $A_1A_2A_3\ldots A_{127}$, którego każdy bok ma długość będącą liczbą całkowitą. Bok A_1A_2 ma długość 1 i jest styczny do okręgu w punkcie P. Udowodnij, że

$$\frac{63}{127} \leqslant A_1P \leqslant \frac{64}{127}\,.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że $A_1P=\frac{1}{2}$, co od razu daje tezę.

Niech P_i dla $i=2,3,\ldots,127$ będzie punktem styczności boku A_iA_{i+1} z okręgiem wpisanym w wielokąt $A_1A_2A_3\ldots A_{127}$ (rys. 6), gdzie przyjmujemy $A_{128}=A_1$.



rys. 6

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy równości:

$$A_1P_{127}=A_1P,\quad A_2P=A_2P_2,\quad A_3P_2=A_3P_3,\quad \ldots,\quad A_{127}P_{126}=A_{127}P_{127}\,.$$

Stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned}
&A_1P+A_2A_3+A_4A_5+\ldots+A_{126}A_{127}=\\
&\quad=A_1P+(A_2P_2+P_2A_3)+(A_4P_4+P_4A_5)+\ldots+(A_{126}P_{126}+P_{126}A_{127})=\\
&\quad=A_1P_{127}+A_2P+P_3A_3+A_4P_3+P_5A_5+\ldots+A_{126}P_{125}+P_{127}A_{127}=\\
&\quad=A_2P+(P_3A_3+A_4P_3)+(P_5A_5+A_6P_5)+\ldots+\\
&\qquad\quad+(P_{125}A_{125}+A_{126}P_{125})+(P_{127}A_{127}+A_1P_{127})=\\
&\quad=A_2P+A_3A_4+A_5A_6+\ldots+A_{125}A_{126}+A_{127}A_1\,.
\end{aligned}$$

Porównując skrajne wyrażenia, dostajemy

$$A_2P-A_1P=A_2A_3-A_3A_4+A_4A_5-\ldots+A_{126}A_{127}-A_{127}A_1\,,$$

skąd wniosek, że A_2P-A_1P jest liczbą całkowitą. Ponieważ

$$A_1P<A_1A_2=1 \quad \text{oraz} \quad A_2P<A_1A_2=1\,,$$

to $-1<A_2P-A_1P<1$. Zatem $A_2P-A_1P=0$, skąd wobec równości

$$A_1P+A_2P=A_1A_2=1$$

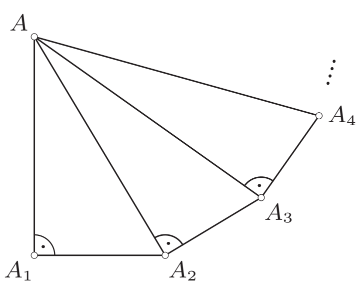
dostajemy $A_1P=A_2P=\frac{1}{2}$.

Zadanie 12. Czy istnieje ostrosłup 127-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?

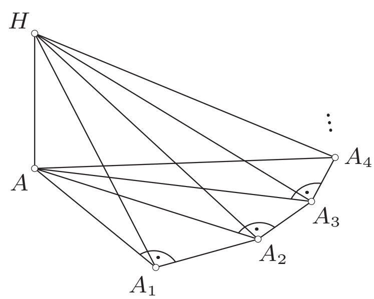
Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki ostrosłup istnieje.

Niech $AA_1A_2A_3\ldots A_{126}$ będzie takim wielokątem wypukłym, że kąty AA_1A_2, AA_2A_3, AA_3A_4, …, $AA_{125}A_{126}$ są proste (rozpoczynamy od trójkąta prostokątnego AA_1A_2 i na przeciwprostokątnej każdego nowo otrzymanego trójkąta prostokątnego budujemy kolejny — rys. 7). Niech AH będzie odcinkiem prostopadłym do płaszczyzny zawierającej dany wielokąt (rys. 8). Wykażemy, że ostrosłup $HAA_1A_2\ldots A_{126}$ spełnia warunki zadania.



rys. 7



rys. 8

Skoro odcinek AH jest prostopadły do płaszczyzny podstawy, to jest też prostopadły do każdej prostej leżącej w tej płaszczyźnie. W takim razie $AH\perp AA_1$ i $AH\perp AA_{126}$, czyli trójkąty HAA_1 i HAA_{126} są prostokątne. Podobnie mamy $AH\perp A_1A_2$. Stąd i z zależności $AA_1\perp A_1A_2$ wnosimy, że płaszczyzna HAA_1, zawierająca proste AA_1 i AH jest także prostopadła do prostej

A_1A_2. W takim razie $A_1H \perp A_1A_2$, czyli trójkąt HA_1A_2 również jest prostokątny. Analogicznie dowodzimy, że trójkąty HA_iA_{i+1} dla $i=2,3,\ldots,125$ także są prostokątne. To zaś kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 13. Wujek Szymon ma 170 torebek z cukierkami. Chce obdarować 13 dziewczynek tak, by każda otrzymała co najmniej dwie torebki. Udowodnij, że może to zrobić tak, by liczby cukierków otrzymanych przez dziewczynki były podzielne przez 13.

Rozwiązanie

Rozpoczniemy od wykazania, że spośród czternastu torebek można wybrać co najmniej dwie i co najwyżej trzynaście tak, aby łączna liczba cukierków była podzielna przez 13. Jeśli liczby cukierków w pewnych dwóch torebkach są podzielne przez 13, to wystarczy wybrać te dwie torebki. W przeciwnym razie jest co najwyżej jedna torebka z liczbą cukierków podzielną przez 13, więc liczby cukierków w pozostałych trzynastu torebkach nie są podzielne przez 13. Oznaczmy je odpowiednio przez $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ i rozważmy liczby

$$a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_1+a_2+a_3, \quad \ldots, \quad a_1+a_2+\ldots+a_{13}\,.$$

Jeśli wśród nich istnieje liczba podzielna przez 13, to jest ona oczywiście różna od a_1, a więc jest sumą liczb cukierków z co najmniej dwóch i co najwyżej trzynastu torebek. W przeciwnym razie pewne dwie spośród rozważanych liczb dają jednakowe reszty z dzielenia przez 13. Nie mogą to być dwie kolejne liczby $a_1+a_2+\ldots+a_k$ i $a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}$, bowiem ich różnica a_{k+1} dzieliłaby się przez 13 wbrew wcześniej poczynionemu założeniu. Zatem muszą to być liczby postaci $a_1+a_2+\ldots+a_k$ i $a_1+a_2+\ldots+a_{k+\ell}$ dla pewnego $\ell>1$. Ich różnica $a_{k+1}+\ldots+a_{k+\ell}$ dzieli się przez 13 oraz jest sumą liczb cukierków z co najmniej dwóch i co najwyżej trzynastu torebek. Uzasadnienie pierwszego zdania rozwiązania jest więc zakończone.

Teraz wystarczy, aby wujek Szymon postępował w następujący sposób. Spośród wszystkich 170 torebek wybiera najpierw czternaście i wśród nich znajdzie co najwyżej trzynaście o łącznej liczbie cukierków podzielnej przez 13, którymi obdaruje pierwszą dziewczynkę. Pozostanie mu co najmniej 157 torebek, z których znów w opisany powyżej sposób znajdzie co najwyżej trzynaście o łącznej liczbie cukierków podzielnej przez 13, którymi obdaruje drugą dziewczynkę. Ponieważ $170=13\cdot12+14$, a więc opisane powyżej postępowanie można kontynuować tak, aby obdarować 13 dziewczynek w żądany w treści zadania sposób.

Zadanie 14. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, n, że liczby $a+b^3$, $b+c^4$ i $c+a^5$ są podzielne przez n. Udowodnij, że liczba $a^{119}-a$ również jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Wykorzystując dane w treści zadania podzielności możemy napisać

$$a \equiv -b^3 \equiv -(-c^4)^3 \equiv c^{12} \equiv (-a^5)^{12} \equiv a^{60} \pmod{n}\,.$$

Po przemnożeniu obu stron kongruencji przez a^{59} dostajemy

$$a^{60} \equiv a^{119} \pmod{n}.$$

W takim razie

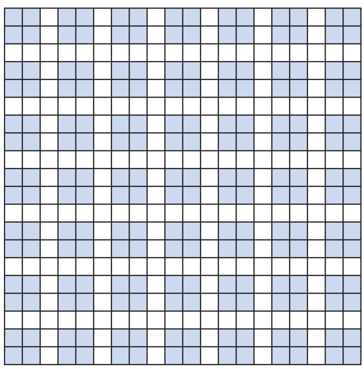
$$a^{119} \equiv a^{60} \equiv a \pmod{n},$$

co daje tezę.

Zadanie 15. Na szachownicy 20×20 umieszczono 48 kwadratów 2×2 tak, że każdy pokrywa 4 pola. Wykaż, że na szachownicy można umieścić jeszcze jeden kwadrat 2×2 tak, by pokrywał 4 wolne pola.

Rozwiązanie

Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku (rys. 9). Znajduje się na niej 49 zamalowanych kwadratów 2×2. Zauważmy, że każdy z rozważanych w zadaniu 48 kwadratów pokrywa zamalowane pola z dokładnie jednego kwadratu na szachownicy. W takim razie pewne cztery zamalowane pola tworzące kwadrat nie będą pokryte. Tam właśnie możemy położyć czterdziesty dziewiąty kwadrat.



rys. 9

Zadanie 16. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i C, różnych od B. Okrąg o przechodzi przez punkty A i C i przecina okrąg o_1 w punkcie D. Prosta DB przecina okrąg o w punkcie E. Odcinek EC przecina okrąg o_2 w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt BCF jest równoramienny.

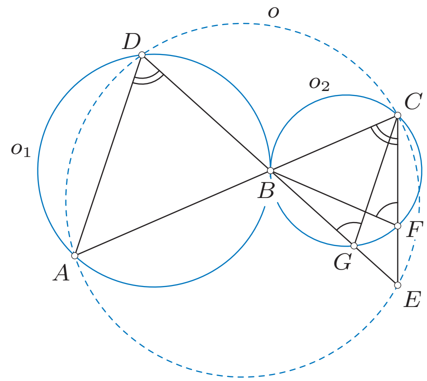
Rozwiązanie

Niech G będzie punktem przecięcia prostej BD z okręgiem o_2, różnym od B (rys. 10). Punkty D, E, A, C leżą na jednym okręgu, przy czym punkty D i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC, więc $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADE$. Podobnie punkty C, G, B, F leżą na okręgu o_2 oraz punkty C i G leżą po przeciwnych stronach prostej BF, zatem $\sphericalangle CGB = \sphericalangle CFB$.

Skoro okręgi o_1 i o_2 są styczne, to istnieje jednokładność o środku w punkcie B, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2. Ta sama jednokładność przeprowadza kąt ADB na kąt CGB, wobec czego $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CGB$. Stąd

$$\sphericalangle BCF = \sphericalangle ACE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CGB = \sphericalangle CFB\,,$$

co daje tezę.



rys. 10

Zadanie 17. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od pq, dla których liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez pq?

Rozwiązanie

Zauważmy, że $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Skoro $p > 2$ jest liczbą pierwszą oraz $p \mid (n-1)n(n+1)$, to p dzieli dokładnie jedną spośród liczb $n-1$, n, $n+1$. Rzeczywiście, $n-1$ i n oraz n i $n+1$ to pary liczb względnie pierwszych; z kolei wspólny dzielnik liczb $n-1$ i $n+1$ musi być również dzielnikiem liczby $(n+1)-(n-1) = 2$. Analogicznie stwierdzamy, że q dzieli dokładnie jedną spośród liczb $n-1$, n, $n+1$.

Jeśli więc liczba $0 < n < pq$ spełnia warunki zadania, to zachodzą kongruencje

$$n \equiv s \pmod{p}\,, \quad n \equiv t \pmod{q} \tag{$*$}$$

dla pewnych $s,t \in \{-1,0,1\}$. Parę (s,t) możemy dobrać na $3^2 = 9$ sposobów, zaś dla ustalonej pary na mocy chińskiego twierdzenia o resztach (porównaj rozwiązanie zadania 48 z *Ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG 2012/13*, seria X, kwiecień 2013) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie układu kongruencji $(*)$ mniejsze od pq i nie mniejsze od zera.

Skoro liczby p i q są różne i większe od 2, to otrzymane rozwiązania są parami różne. Istotnie, jeśli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzą kongruencje $n \equiv s_1 \pmod{p}$ oraz $n \equiv s_2 \pmod{p}$, to $s_1 \equiv s_2 \pmod{p}$ i w konsekwencji $s_1 = s_2$ (gdyż $p > 2$). Analogicznie stwierdzamy, że jeśli $n \equiv t_1 \pmod{q}$ oraz $n \equiv t_2 \pmod{q}$, to $t_1 = t_2$. Ponadto dla pary $(0,0)$ rozwiązaniem jest $n = 0$, które nie spełnia założeń zadania, dla pozostałych par zaś otrzymujemy liczby dodatnie. W takim razie jest 8 liczb n spełniających warunki zadania.

Zadanie 18. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc\,.$$

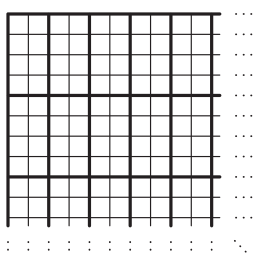
Rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$$x=\frac{b+c-a}{2}, \quad y=\frac{c+a-b}{2}, \quad z=\frac{a+b-c}{2}\,.$$
Wówczas $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, zaś teza zadania przyjmuje postać
$$2x\cdot 2y\cdot 2z \leqslant (y+z)(z+x)(x+y)\,.$$
Z nierówności trójkąta wynika, że liczby x, y, z są dodatnie. Korzystając zatem z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy kolejno:
$$2\sqrt{xy}\leqslant x+y\,, \quad 2\sqrt{yz}\leqslant y+z\,, \quad 2\sqrt{zx}\leqslant z+x\,.$$
Mnożąc stronami powyższe nierówności, dostajemy tezę.

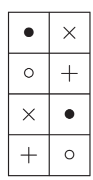
Zadanie 19. Ile co najwyżej skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach 100×100 tak, by żadne dwa sobie nie zagrażały?
Uwaga: Dwa skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach 2×3.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że skoczek stojący na białym polu zagraża jedynie polom czarnym. Jeśli więc ustawimy 5000 skoczków na wszystkich białych polach, to nie będą sobie zagrażać.



rys. 11



rys. 12

Wykażemy teraz, że na szachownicy 100×100 nie można ustawić większej liczby skoczków tak, by żadne dwa sobie nie zagrażały. Podzielmy daną szachownicę na prostokąty 2×4 (rys. 11) w każdym z nich połączmy pola w pary, jak na rysunku 12. Łącznie jest 5000 par, zaś na dwóch polach należących do tej samej pary nie można umieścić skoczków. To zaś oznacza, że liczba skoczków nie może przekroczyć 5000.

Zadanie 20. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i półprosta AM przecina okrąg o w punkcie E. Punkt N jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC i półprosta AN przecina okrąg o w punkcie F. Wykaż, że jeżeli odcinki ME i NF są równej długości, to $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAC$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

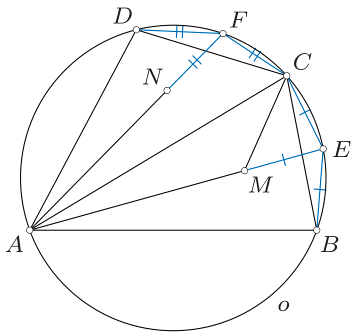
$$\sphericalangle MCE = \sphericalangle MCB + \sphericalangle BCE = \sphericalangle ACM + \sphericalangle BAE = \\ = \sphericalangle ACM + \sphericalangle CAM = \sphericalangle CME,$$

skąd wynika, że $ME = CE$ (rys. 13). Ponadto $BE = CE$.

Analogicznie dostajemy równości

$$CF = DF = NF.$$

Skoro jednak $ME = NF$, to wszystkie powyższe odcinki mają równą długość. W takim razie łuki BC i CD okręgu o niezawierające punktu A są równe. To zaś oznacza, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.



rys. 13

Mecz matematyczny

Zadanie 21. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieje taka dodatnia liczba całkowita $n \leqslant 1000$, że liczba nx ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

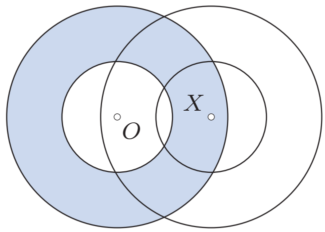
Rozwiązanie

Dla każdej z liczb x, $2x$, $3x$, ..., $1000x$ rozpatrzmy pierwsze trzy cyfry po przecinku. Jeśli któraś z nich ma na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera, to dostajemy tezę. W przeciwnym wypadku na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwie liczby, dla których rozważane trójki cyfr są identyczne. Po odjęciu mniejszej z tych liczb od większej otrzymujemy wielokrotność liczby x spełniającą warunki zadania.

Zadanie 22. W kole o promieniu 18 wybrano 2267 punktów. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 1 i 2, który zawiera nie mniej niż 18 spośród tych punktów.

Rozwiązanie

Jeśli punkt X jest przykryty przez pierścień o środku w punkcie O, to $1 \leqslant OX \leqslant 2$. W takim razie punkt O jest przykryty przez pierścień o środku w punkcie X (rys. 14). Narysujmy zatem pierścienie o promieniach 1 i 2 w każdym z rozważanych 2267 punktów. Wszystkie te pierścienie leżą wewnątrz koła o promieniu 20. Wystarczy wykazać, że pewien punkt tego koła jest przykryty przez co najmniej 18 pierścieni.



rys. 14

Przypuśćmy, że każdy punkt rozważanego koła o promieniu 20 jest przykryty przez co najwyżej 17 pierścieni. Wtedy suma pól wszystkich pierścieni nie przekracza pola koła o promieniu 20 pomnożonego przez 17. Innymi słowy — nie przekracza wartości liczby $20^2 \cdot \pi \cdot 17 = 6800\pi$. Z drugiej strony bezpośrednio obliczamy, że suma pól pierścieni wynosi $(2^2 - 1^1) \cdot \pi \cdot 2267 = 6801\pi$. Otrzymana sprzeczność oznacza, że pewien punkt rozważanego koła jest przykryty przez co najmniej 18 pierścieni, więc rozwiązanie jest zakończone.

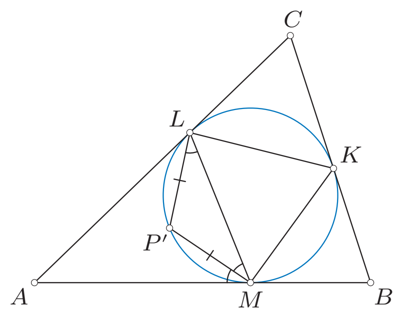
Zadanie 23. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Punkty P, Q, R są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ALM, BMK, CKL. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech P' będzie środkiem krótszego łuku LM okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 15). Wówczas $LP' = MP'$, zatem $\sphericalangle LMP' = \sphericalangle MLP'$. Stąd i z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą dostajemy

$$\sphericalangle AMP' = \sphericalangle MLP' = \sphericalangle LMP' .$$

Analogicznie stwierdzamy, że $\sphericalangle ALP' = \sphericalangle MLP'$. W takim razie punkt P' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ALM, czyli $P' = P$. To zaś oznacza, że prosta KP jest dwusieczną kąta MKL trójkąta KLM.



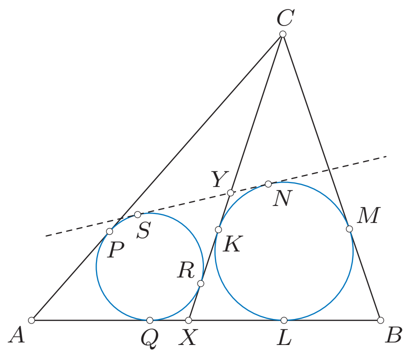
rys. 15

W podobny sposób dowodzimy, że proste LQ i MR są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach L i M trójkąta KLM. Zatem wszystkie trzy rozważane proste mają wspólny punkt, będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KLM.

Zadanie 24. Dany jest trójkąt ABC. Punkt X należy do boku AB tego trójkąta. Wspólna zewnętrzna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty AXC i BXC, różna od prostej AB, przecina odcinek CX w punkcie Y. Wykaż, że długość odcinka CY nie zależy od wyboru punktu X.

Rozwiązanie

Niech P, Q, R będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt AXC odpowiednio z bokami AC, AX, CX, zaś S punktem styczności tego okręgu z rozważaną w zadaniu styczną. Przez K, L, M oznaczmy natomiast punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt BXC odpowiednio z bokami CX, BX, BC, a przez N punkt styczności z rozważaną styczną (rys. 16).



rys. 16

Symetria względem prostej łączącej środki rozważanych okręgów przekształca punkt Q na punkt S, zaś punkt L na punkt N, skąd wniosek, że $QL = SN$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnosimy, że $YR = YS$ oraz $YK = YN$. To zaś pozwala napisać

$$2CY + QL = 2CY + SN = 2CY + YS + YN = 2CY + YR + YK = CR + CK\,.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia o odcinkach stycznych, dostajemy

$$CR = CP\,, \quad CK = CM\,, \quad AP = AQ\,, \quad BM = BL\,.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} 2CY + QL = CR + CK = CP + CM = AC - AP + BC - BM = \\ = AC - AQ + BC - BL = AC + BC - AB + QL\,, \end{aligned}$$

czyli $2CY = AC + BC - AB$, a więc długość odcinka CY nie zależy od wyboru punktu X.

Zadanie 25. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt prostokątny BCD o kącie prostym przy wierzchołku D. Punkt B jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Dane są $BD=p$, $CD=q$, $AB=s$. Oblicz promień sfery wpisanej w ten ostrosłup.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Objętość czworościanu $ABCD$ o polu powierzchni S, w którym promień sfery wpisanej ma długość r, wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3}Sr$.

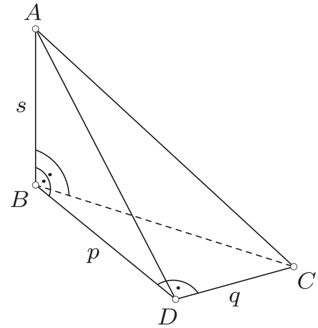
Dowód lematu

Oznaczmy środek sfery wpisanej w dany czworościan przez I. Zauważmy, że czworościan $ABCD$ można podzielić na cztery czworościany $ABCI$, $BCDI$, $CDAI$, $DABI$, których wysokości opuszczone odpowiednio na ściany ABC, BCD, CDA, DAB są wszystkie równe r. Objętość czworościanu $ABCD$ możemy więc wyrazić w następujący sposób

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABCI} + V_{BCDI} + V_{CDAI} + V_{DABI} = \\ &= \frac{1}{3}[ABC]r + \frac{1}{3}[BCD]r + \frac{1}{3}[CDA]r + \frac{1}{3}[DAB]r = \\ &= \frac{1}{3}([ABC] + [BCD] + [CDA] + [DAB])r = \frac{1}{3}Sr\,, \end{aligned}$$

przy czym $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Dowód lematu jest więc zakończony.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Wykażemy najpierw, podobnie jak w rozwiązaniu zadania 12, że $\sphericalangle ADC = 90°$ (rys. 17). Odcinek AB jest wysokością danego ostrosłupa, a więc jest prostopadły do jego podstawy BCD. W szczególności jest on także prostopadły do prostej CD. Stąd oraz z prostopadłości prostych BD i CD wnosimy, że płaszczyzna ABD jest prostopadła do CD. To zaś pociąga za sobą prostopadłość prostych AD i CD — innymi słowy $\sphericalangle ADC = 90°$. W takim razie wszystkie ściany czworościanu $ABCD$ są trójkątami prostokątnymi.



rys. 17

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABD i BDC otrzymujemy

$$AD=\sqrt{p^2+s^2} \quad \text{oraz} \quad BC=\sqrt{p^2+q^2}\,.$$

Pole S powierzchni danego czworościanu jest zatem równe

$$\frac{1}{2}(AB\cdot BD+AB\cdot BC+CD\cdot BD+CD\cdot AD)=\frac{1}{2}(sp+s\sqrt{p^2+q^2}+qp+q\sqrt{p^2+s^2}),$$

natomiast jego objętość V wynosi $\frac{1}{6}pqs$. Korzystając z udowodnionego na początku lematu, stwierdzamy, że promień sfery wpisanej jest równy

$$\frac{3V}{S}=\frac{pqs}{sp+s\sqrt{p^2+q^2}+qp+q\sqrt{p^2+s^2}}\,.$$

Zadanie 26. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $a+b+c\geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc\,.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\,.$$

Pierwszy czynnik jest nieujemny z założenia, drugi natomiast jest nieujemny jako połowa sumy trzech kwadratów:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\,.$$

W takim razie

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc\,,$$

co natychmiast daje tezę.

Zadanie 27. W każde pole szachownicy 13×13 wkręcono żarówkę. W jednym ruchu można zmienić stan (zapalona/zgaszona) 4 żarówek zajmujących kwadrat 2×2 lub 81 żarówek zajmujących kwadrat 9×9. Czy zaczynając od dowolnego układu można za pomocą takich ruchów zgasić wszystkie żarówki?

Rozwiązanie

Zauważmy, że ruchy są przemienne i odwrotne do samych siebie. Z danego układu da się doprowadzić do zgaszenia wszystkich żarówek wtedy i tylko wtedy, gdy ze zgaszonego układu da się doprowadzić do danego. Istotnie, wystarczy powtórzyć te same ruchy.

Wszystkich układów jest 2^{169}, bo jest 169 żarówek i każda może być włączona lub wyłączona. Na 144 sposoby możemy wybrać kwadrat 2×2 do zmiany stanu oraz na 25 sposobów możemy wybrać kwadrat 9×9. Ze zgaszonego układu można więc dojść do co najwyżej $2^{25}\cdot 2^{144}=2^{169}$ układów, bo liczy się tylko parzystość liczby zmian stanu danego kwadratu.

Wystarczy udowodnić, że ze zgaszonego układu nie da się doprowadzić do każdego innego. Jeśli wskażemy niepusty zbiór ruchów, który nie zmienia stanu żadnej żarówki, to okaże się, że nie uda się otrzymać każdego układu, bo liczba różnych układów, do jakich da się dojść, jest mniejsza od liczby wszystkich układów.

Wybierzmy na szachownicy kwadrat 11×11 i wykonajmy na nim po cztery ruchy każdego rodzaju, każdy ruch w innym rogu wybranego kwadratu. Wówczas na każdym polu dokonamy parzystej liczby zmian stanu. Istnieje zatem opisany powyżej niepusty zbiór zmian, więc ze zgaszonego układu nie da się otrzymać wszystkich innych.

Zadanie 28. Na okręgu znajduje się $n \geqslant 4$ lamp. Przy każdej z nich znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) tej lampy i jej dwóch sąsiadów. Na początku jedna lampa jest zapalona, a pozostałe są zgaszone. Dla których n można za pomocą przełączników doprowadzić do tego, by wszystkie lampy były zgaszone?

Rozwiązanie

Nazwijmy lampy na okręgu $L_1, L_2, \ldots, L_n$, w razie potrzeby przyjmujemy $L_{n+1} = L_1$, $L_{n+2} = L_2$ itd. Załóżmy, że na początku zapalona jest L_1.

Gdy $3 \nmid n$, przełączmy najpierw L_2. Wówczas zapalone pozostają L_2, L_3. Przełączmy teraz L_4 oraz L_5. Zapalone pozostają L_2, L_6. Następnie mając zapalone L_2, L_{3k}, przełączamy L_{3k+1}, L_{3k+2} i otrzymujemy zapalone L_2, $L_{3(k+1)}$. Zauważmy, że każde wykonanie opisanego ruchu powoduje wzrost liczby k o 1. Taki ruch powtarzamy tak długo, aż $L_{3k} = L_2$, czyli aż zapalone będą lampy L_2, $L_{3k} = L_2$, a więc żadna (lampa włączona dwa razy jest zgaszona). Jeżeli $n = 3\ell + 1$, to taki moment nastąpi, gdy liczba k wzrośnie do $\ell + 1$, jeżeli zaś $n = 3\ell + 2$, to taki moment nastąpi, gdy $k = 2\ell + 2$.

Gdy $3 \mid n$, wykręcamy żarówki z lamp o numerach podzielnych przez 3. Początkowo liczba świecących się lamp jest nieparzysta (tylko L_1). Po dowolnym ruchu zmieniamy stan dwóch lamp z żarówkami, więc cały czas nieparzysta liczba lamp będzie zapalona. Skoro nie jesteśmy w stanie wyłączyć części lamp, to tym bardziej nie wyłączymy wszystkich.

Zadanie 29. Rozstrzygnij, czy jest wymierna liczba $0{,}11235831459\ldots$, której każda cyfra, począwszy od trzeciej po przecinku, jest cyfrą jedności sumy dwóch cyfr poprzednich.

Rozwiązanie

Niech a_n oznacza n-tą cyfrę po przecinku danej liczby. Rozpatrzmy 101 par (a_k, a_{k+1}) dla $k = 1, 2, 3, \ldots, 101$. Ponieważ mogą one przyjąć tylko 100 różnych wartości, to

$$(a_\ell, a_{\ell+1}) = (a_m, a_{m+1})$$

dla pewnych $\ell < m$.

Jednocześnie wiemy, że dwie kolejne cyfry rozwinięcia rozważanej liczby wyznaczają jednoznacznie wszystkie następne. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej i zachodzi $a_{\ell+i} = a_{m+i}$. Innymi słowy od ℓ-tego miejsca po przecinku powtarza się ciąg cyfr o okresie $m-\ell$. To zaś oznacza, że dana liczba jest wymierna.

Uwaga

Dana w treści zadania liczba jest równa

$$0,(112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910)\,.$$

Jest to ułamek dziesiętny okresowy o okresie długości 60. Wobec tego liczbę tę można przedstawić w postaci ułamka zwykłego

$$\frac{112358314594370774156178538190998752796516730336954932572910}{999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999}\,,$$

który po skróceniu wygląda następująco:

$$\frac{112358202236168425629438314382022572910}{999990000009989990010009990000000999999}\,.$$

Zadanie 30. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $(n^2)!$ jest podzielna przez $(n!)^{n+1}$.

Rozwiązanie

Policzmy na ile sposobów możemy podzielić stado n^2 rozróżnialnych koni na n ponumerowanych grup po n koni. Najpierw wybierzmy skład pierwszej grupy, możemy to zrobić na

$$\binom{n^2}{n} = \frac{(n^2)!}{(n^2-n)!\cdot n!}$$

sposobów. Drugą grupę wybieramy na

$$\binom{n^2-n}{n} = \frac{(n^2-n)!}{(n^2-2n)!\cdot n!}$$

sposobów. Tak samo wybieramy następne grupy, k-tą na

$$\binom{n^2-(k-1)n}{n} = \frac{(n^2-(k-1)n)!}{(n^2-kn)!\cdot n!}$$

sposobów. Łączna liczba sposobów, na jakie wybraliśmy n grup jest więc równa

$$\binom{n^2}{n}\binom{n^2-n}{n}\cdot\ldots\cdot\binom{n^2-(k-1)n}{n}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{n}$$

czyli

$$\frac{(n^2)!}{(n^2-n)!\cdot n!}\cdot\frac{(n^2-n)!}{(n^2-2n)!\cdot n!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n^2-(k-1)n)!}{(n^2-kn)!\cdot n!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n^2-(n-1)n)!}{n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^n}.$$

Aby otrzymać liczbę podziałów stada n^2 koni na n nierozróżnialnych, równolicznych grup, musimy otrzymany wynik podzielić przez $n!$. Uzyskujemy wniosek, że liczba tych podziałów wynosi

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}\,,$$

więc musi to być liczba całkowita.

Zadanie 31. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba n^4+4^n jest złożona.

Rozwiązanie

Jeśli liczba n jest parzysta, to liczba n^4+4^n dzieli się przez 4, a więc jest złożona. Pozostaje do rozważenia przypadek, gdy $n=2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Wówczas dostajemy

$$\begin{aligned} n^4+4^n &= n^4+4^{2k+1} = n^4+2^{4k+2} = n^4+2n^2\cdot 2^{2k+1}+2^{4k+2}-n^2\cdot 2^{2k+2} = \\ &= (n^2+2^{2k+1})^2-n^2\cdot 2^{2k+2} = \\ &= (n^2+2^{2k+1}+n\cdot 2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}-n\cdot 2^{k+1})\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} n^2+2^{2k+1}-n\cdot 2^{k+1} &= n^2-2\cdot n\cdot 2^k+2^{2k}+2^{2k} = \\ &= (n-2^k)^2+2^{2k} \geqslant 2^{2k} \geqslant 4 > 1\,, \end{aligned}$$

więc oba czynniki iloczynu $(n^2+2^{2k+1}+n\cdot 2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}-n\cdot 2^{k+1})$ są większe od 1. To oznacza, że liczba n^4+4^n jest złożona.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6 – 11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6 – 11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści