STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OMG

2014 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom OMG
2014 rok

WARSZAWA 2014

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autorzy rozwiązań: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz, Jarosław Wróblewski

Recenzent: dr Jerzy Bednarczuk

Skład komputerowy: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz, Jarosław Wróblewski

Rysunki: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jarosław Wróblewski

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-07-5

Nakład: 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OMG, który odbył się w dniach od 1–7 czerwca 2014 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów — młodszych klas gimnazjum, wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na zawodach trzeciego stopnia IX edycji OMG (2013/2014):

Radomił Baran, Łukasz Czyż, Radosław Girul, Piotr Jasiński, Łukasz Kamiński, Tomasz Kiełbasa, Michał Kosmecki, Patryk Księżuk, Maksymilian Kulicki, Weronika Lorenczyk, Maciej Maruszczak, Daniel Murawski, Tomasz Nowak, Anna Pacanowska, Agnieszka Pałka, Paweł Pawlik, Michał Siennicki, Stanisław Strzelecki, Stanisław Szcześniak oraz Kinga Sztonyk.

Kadrę Obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz oraz Jarosław Wróblewski.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 126 punktów. Trzy najlepsze wyniki to: 100 punktów, 90 punktów i 62 punkty. Aby ułatwić Czytelnikowi ocenę trudności poszczególnych zadań, opracowano tabelę punktacji uczestników Obozu dla poszczególnych zadań.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	4	0	0	16
2.	7	0	1	12
3.	10	0	0	10
4.	0	0	0	20
5.	9	0	0	11
6.	8	1	7	4
7.	9	0	0	11
8.	1	2	1	16
9.	7	0	1	12
10.	14	2	0	4
11.	14	2	0	4
12.	2	0	1	17
13.	1	0	1	18
14.	10	1	1	8
15.	3	1	0	16
16.	3	1	0	16
17.	15	1	1	3
18.	6	0	0	14
19.	1	0	0	19
20.	3	0	0	17
21.	2	0	0	18

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90°$. Okręgi o środkach B i C przechodzące przez punkt A przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach D i E. Punkt F wybrano wewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, że $DF = EF$ oraz $\sphericalangle DFE = 90°$. Wykaż, że $AF = DF$.

2. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach (każdy z narysowanych odcinków ma długość 1):

Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz najmniejszą liczbę płytek potrzebnych do ułożenia trójkąta równobocznego o boku n.

Uwaga: Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n oraz każdej dodatniej liczby całkowitej k, liczba $n^{2^k} - 1$ jest podzielna przez 2^{k+2}.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

4. Interesują nas takie ostrosłupy czworokątne $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w których

$$2\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC, \quad 2\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD, \quad 2\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSA.$$

Przypuśćmy, że $2\sphericalangle SAD = \sphericalangle SAB$ oraz trójkąty ABS i ADS są równoramienne. Wyznacz wszystkie możliwe miary kąta SAB.

5. Udowodnij, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$2xy + 3yz + 6zx \leqslant 20x^2 + 5y^2 + z^2\,.$$

6. Wyznacz największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 25 600 000 (słownie: dwadzieścia pięć milionów sześćset tysięcy), to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

7. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ istnieje taki punkt P, że spełnione są warunki

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP = \sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = 45°.$$

Udowodnij, że $BC + DE + FA \geqslant \max(AB, CD, EF)$.

8. Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających równanie
$$m(m+1)=(n-17)(n+17).$$

Drugie zawody indywidualne

9. Na tablicy narysowano 2014 kółek, 3000 krzyżyków i 5000 kwadratów. W jednym ruchu możemy wykonać jedną z następujących operacji:

- zmazać dwa kółka i narysować krzyżyk,
- zmazać dwa krzyżyki i narysować kwadrat,
- zmazać dwa kwadraty i narysować kółko.

Rozstrzygnij, czy można wykonać taki ciąg ruchów, aby na tablicy pozostały mniej niż trzy figury.

10. Rozstrzygnij, czy istnieje czworokąt wypukły, który nie jest trapezem, a jego przekątne dzielą go na cztery trójkąty równoramienne.

11. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność
$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+d}{c}+\frac{c+e}{d}+\frac{d+a}{e}+\frac{e+b}{a}\geqslant 10.$$

12. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność
$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Trzecie zawody indywidualne

13. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Proste AM i BN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że w czworokąt $MPNC$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC są styczne.

14. Na kwadratowej szachownicy o boku 2015 umieszczamy prostokąty o wymiarach 1×10 tak, że każdy z nich pokrywa 10 pól szachownicy, a przy tym żadne pole nie jest pokryte przez więcej niż jeden prostokąt. Ile co najmniej pól szachownicy musi pozostać niepokrytych?

15. Rozstrzygnij, dla ilu liczb naturalnych $n>1$ prawdziwe jest następujące zdanie: Dla każdej dodatniej liczby całkowitej a względnie pierwszej z n, liczba a^6-1 jest podzielna przez n.

16. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie BCD, w którym wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A są proste oraz krawędzie boczne mają długość 1. Rozstrzygnij, czy odległość między środkami sfery wpisanej w dany ostrosłup i sfery opisanej na tym ostrosłupie jest liczbą wymierną.

Czwarte zawody indywidualne

17. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to liczba p^6+6 jest złożona.

18. Udowodnij, że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniającej układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ a^3+b^3+c^3+d^3=28 \end{cases}$$

zachodzi nierówność

$$abc+bcd+cda+dab \geqslant -4.$$

19. Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $AK=BL$. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków AB i KL. Wykaż, że prosta MN jest równoległa do dwusiecznej kąta ACB.

20. Rozstrzygnij, czy w kwadracie o boku 51 można umieścić 145 kwadratów 4×4 o rozłącznych wnętrzach.

21. Niech p będzie liczbą pierwszą. Przyjmijmy

$$a_0=p \quad \text{oraz} \quad a_{n+1}=3^{a_n}-2^{a_n} \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

Wykaż, że jeżeli a_p jest liczbą złożoną, to liczba a_{p^2} też jest złożona.

Mecz matematyczny

22. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite $m<n$, że $n<1{,}001\cdot m$, a przy tym liczba n^n jest podzielna przez m^m.

23. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt A' wybrano w taki sposób, że $\sphericalangle A'BC=\sphericalangle A'CB=\sphericalangle BAC$ oraz punkty A, A' leżą po tej samej stronie prostej BC. Analogicznie zdefiniowano punkty B' i C'. Udowodnij, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola.

24. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^4+b^4+c^4+d^4=5^{2014}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c, d.

25. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, którą można przedstawić na co najmniej 2014 sposobów w postaci

$$a^2+b^3+c^5,$$

gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi.

26. Niech S_A, S_B, S_C, S_D bedą polami powierzchni sfer dopisanych odpowiednio do ścian BCD, CDA, DAB, ABC czworościanu $ABCD$, a S niech będzie polem powierzchni sfery wpisanej w ten czworościan. Wykaż, że

$$\frac{1}{S} \leqslant \frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}.$$

27. Udowodnij, że dla każdej szóstki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2-ab\sqrt{3}+b^2}+\sqrt{b^2-bc\sqrt{3}+c^2}+\sqrt{c^2-cd\sqrt{3}+d^2}+$$
$$+\sqrt{d^2-de\sqrt{3}+e^2}+\sqrt{e^2-ef\sqrt{3}+f^2} \geqslant \sqrt{a^2+af\sqrt{3}+f^2}\,.$$

28. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}+\frac{b}{e+d}+\frac{c}{a+e}+\frac{d}{b+a}+\frac{e}{c+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant 5.$$

29. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $AB>CD$. Punkt M jest środkiem boku AB. Proste AC, BC przecinają okrąg opisany na trójkącie CDM po raz drugi odpowiednio w punktach K, L. Proste MK, ML przecinają prostą CD odpowiednio w punktach P, Q. Wykaż, że punkt D jest środkiem odcinka PQ.

30. W okrąg wpisano dwa wielokąty równokątne: 2014-kąt i 2016-kąt. Jaką największą liczbę wspólnych boków mogą mieć te dwa wielokąty?

31. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, który ma siatkę będącą trójkątem prostokątnym.

32. Podaj liczbę naturalną $n>1$ o następujących własnościach:

1° Dla każdej dodatniej liczby całkowitej $k<n$, Twoja drużyna potrafi przedstawić dowód następującego twierdzenia: Istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^k+k jest pierwsza.

2° Drużyna przeciwna nie potrafi udowodnić, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^n+n jest pierwsza.

Procedura referowania rozwiązania tego zadania:

Kapitan drużyny referującej **X** wskazuje liczbę n.

Kapitan drużyny przeciwnej **Y** wskazuje **jedną** liczbę $k<n$.

Drużyna **X** przedstawia, na ogólnych zasadach rozgrywki meczowej, dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie **1**° dla wskazanej liczby k.

Drużyna **Y**, w ramach formułowania usterek przedstawionego rozwiązania, może zaprezentować dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie **2**°. Dowód ten przedstawia zawodnik wydelegowany przez kapitana drużyny **Y**, bez możliwości zmiany osoby referującej. Uznanie tego dowodu za poprawny oznacza automatyczne uznanie rozwiązania drużyny **X** za błędne.

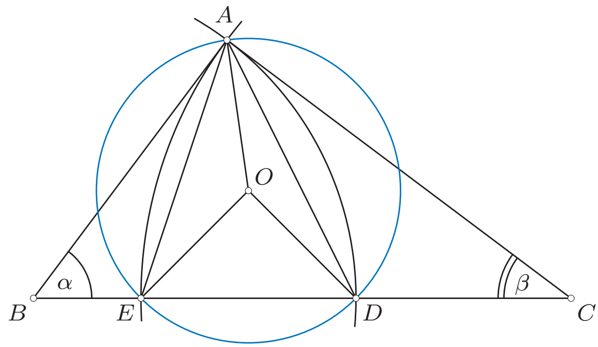
Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Okręgi o środkach B i C przechodzące przez punkt A przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach D i E. Punkt F wybrano wewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, że $DF = EF$ oraz $\sphericalangle DFE = 90^\circ$. Wykaż, że $AF = DF$.

Rozwiązanie

Oznaczmy $\sphericalangle ABC = \alpha$ oraz $\sphericalangle ACB = \beta$. Wówczas $\alpha + \beta = 90^\circ$.



rys. 1

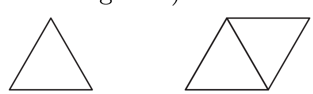
Trójkąty ABD oraz ACE są równoramienne (bo $BA = BD$ i $CA = CE$), a zatem $\sphericalangle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ oraz $\sphericalangle AEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Obliczmy miarę kąta EAD:

$$\sphericalangle EAD = 180^\circ - \sphericalangle ADE - \sphericalangle AED =$$
$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\beta\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ.$$

Środek O okręgu opisanego na trójkącie AED leży wewnątrz tego trójkąta, bo jest on ostrokątny (zatem też wewnątrz trójkąta ABC).

Ponadto $\sphericalangle EOD = 2 \cdot \sphericalangle EAD = 90^\circ$ oraz $OE = OD$. To oznacza, że punkt O pokrywa się z punktem F, zatem F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE, a stąd wynika, że $AF = DF$.

Zadanie 2. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach (każdy z narysowanych odcinków ma długość 1):

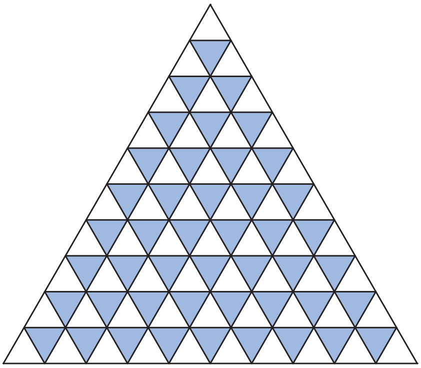


Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz najmniejszą liczbę płytek potrzebnych do ułożenia trójkąta równobocznego o boku n.

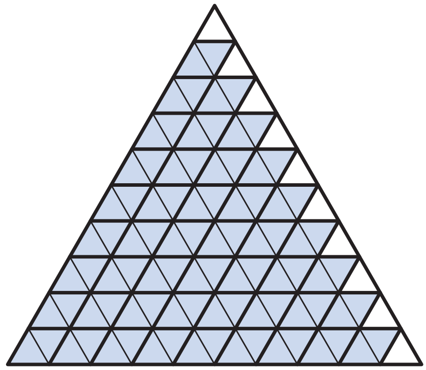
Uwaga: Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Rozwiązanie

Podzielmy trójkąt równoboczny o boku n na n^2 równobocznych trójkątów jednostkowych, zwanych dalej polami. Następnie pokolorujmy pola trójkąta jak na rysunku 2, gdzie sposób pokolorowania przedstawiono na przykładzie trójkąta o boku 10.



rys. 2



rys. 3

Wówczas $(n^2-n)/2$ pól jest kolorowych, a pozostałych $(n^2+n)/2$ pól jest białych.

Ponieważ każda płytka przykrywa co najwyżej jedno pole białe, więc nie można ułożyć trójkąta z mniej niż $(n^2+n)/2$ płytek.

Sposób ułożenia trójkąta z $(n^2+n)/2$ płytek przedstawiony jest na rysunku 3.

Odpowiedź

Najmniejsza liczba płytek potrzebnych do ułożenia trójkąta równobocznego o boku n jest równa $(n^2+n)/2$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n oraz każdej dodatniej liczby całkowitej k, liczba $n^{2^k}-1$ jest podzielna przez 2^{k+2}.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną liczbą nieparzystą.

Korzystając wielokrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, otrzymujemy

$$n^{2^k}-1=\left(n^{2^{k-1}}+1\right)\cdot\left(n^{2^{k-2}}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^4+1\right)\cdot\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)\cdot(n-1),$$

gdzie każdy z $k+1$ czynników występujących w iloczynie po prawej stronie jest parzysty. Ponadto dwa ostatnie czynniki różnią się o 2, więc jeden z nich jest podzielny przez 4. Zatem w rozkładzie tego iloczynu na czynniki pierwsze występują co najmniej $k+2$ dwójki, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4. Interesują nas takie ostrosłupy czworokątne $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w których

$$2\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC,\quad 2\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSD,\quad 2\sphericalangle CSD=\sphericalangle DSA.$$

Przypuśćmy, że $2\sphericalangle SAD=\sphericalangle SAB$ oraz trójkąty ABS i ADS są równoramienne. Wyznacz wszystkie możliwe miary kąta SAB.

Rozwiązanie

Z danych równości kątów wynika, że

$$\sphericalangle DSA = 2\sphericalangle CSD = 4\sphericalangle BSC = 8\sphericalangle ASB,$$

wobec czego

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD = 7\sphericalangle ASB < 8\sphericalangle ASB = \sphericalangle DSA.$$

Powyższa nierówność nie może być jednak spełniona, gdyż suma trzech kątów płaskich przy wierzchołku S musi być większa od czwartego. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje ostrosłup spełniający warunki zadania.

Zadanie 5. Udowodnij, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$2xy + 3yz + 6zx \leqslant 20x^2 + 5y^2 + z^2\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Przenieśmy w nierówności (1) wszystkie wyrazy na prawą stronę:

$$0 \leqslant 20x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy - 3yz - 6zx\,.$$

Przekształcanie prawej strony tej nierówności prowadzi kolejno do:

$$\begin{aligned} 20x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy - 3yz - 6zx &= \\ &= 2x^2 - 2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{9y^2}{2} - 3yz + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} - 6zx + 18x^2 = \\ &= \frac{(2x-y)^2}{2} + \frac{(3y-z)^2}{2} + \frac{(z-6x)^2}{2} \geqslant 0\,, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 6. Wyznacz największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 25 600 000 (słownie: dwadzieścia pięć milionów sześćset tysięcy), to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$25\,600\,000 = 256 \cdot 10^5 = 2^8 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 2^{13} \cdot 5^5.$$

Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że iloczyn mn jest podzielny przez 25 600 000. Wówczas w rozkładzie na czynniki pierwsze iloczynu mn występuje co najmniej 13 dwójek, zatem co najmniej jedna z liczb m, n ma w rozkładzie co najmniej 7 dwójek, jest więc podzielna przez 128. Stąd wynika, że liczba $d = 128$ posiada własność sformułowaną w treści zadania.

Wykażemy, że jest to największa taka liczba. W tym celu podamy dwa przykłady par liczb m, n o iloczynie równym 25 600 000 i prześledzimy zbiór liczb będących dzielnikami jednego z czynników.

Przykład $m = 2^{13}$, $n = 5^5$ pokazuje, że d musi być postaci 2^s lub 5^t, gdzie $0 \leqslant s \leqslant 13$ lub odpowiednio $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Przykład $m=2^7\cdot 5^3$, $n=2^6\cdot 5^2$, w połączeniu z poprzednim przykładem, pokazuje, że d musi być postaci 2^s lub 5^t, gdzie $0\leqslant s\leqslant 7$ lub odpowiednio $0\leqslant t\leqslant 3$.

W związku z tym liczba d spełniająca warunki zadania musi być potęgą dwójki równą co najwyżej 128 lub potęgą piątki równą co najwyżej 125.

Odpowiedź

Największą liczbą mającą własność sformułowaną w treści zadania jest liczba $d=128$.

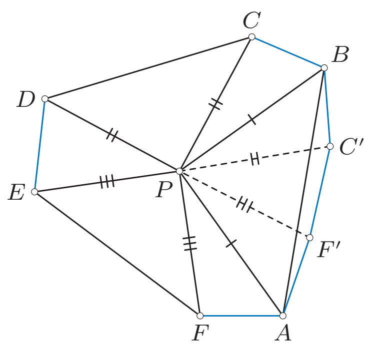
Zadanie 7. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ istnieje taki punkt P, że spełnione są warunki

$$\sphericalangle ABP=\sphericalangle BAP=\sphericalangle CDP=\sphericalangle DCP=\sphericalangle EFP=\sphericalangle FEP=45^\circ.$$

Udowodnij, że $BC+DE+FA\geqslant \max(AB,CD,EF)$.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AB=\max(AB,CD,EF)$. Niech C' będzie punktem symetrycznym do C względem prostej BP, a F' będzie punktem symetrycznym do F względem prostej AP (rys. 4).



rys. 4

Z warunków zadania wynika, że ABP, CDP, EFP to prostokątne trójkąty równoramienne, skąd $EP=FP=F'P$ oraz $DP=CP=C'P$. Ponadto $\sphericalangle BPC+\sphericalangle DPE+\sphericalangle FPA+3\cdot 90^\circ=360^\circ$, skąd

$$\sphericalangle DPE=90^\circ-\sphericalangle BPC-\sphericalangle FPA=\sphericalangle APB-\sphericalangle BPC'-\sphericalangle F'PA=\sphericalangle C'PF'.$$

Uzyskane równości oznaczają, że trójkąty DPE i $C'PF'$ są przystające (cecha bok–kąt–bok), więc $DE=C'F'$. Pozostaje zauważyć, że

$$BC+DE+FA=BC'+C'F'+F'A\geqslant AB,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 8. Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających równanie

$$m(m+1)=(n-17)(n+17). \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Przekształcając równanie (1), otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} m^2+m &= n^2-17^2, \\ 4m^2+4m &= 4n^2-34^2, \\ 4m^2+4m+1 &= 4n^2-(34^2-1), \\ (2m+1)^2-(2n)^2 &= -33\cdot 35, \\ (2n)^2-(2m+1)^2 &= 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11, \\ (2n-2m-1)(2n+2m+1) &= 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11. \end{aligned}$$

Dla każdego rozkładu prawej strony powyższego równania na iloczyn dwóch czynników całkowitych dodatnich $a\cdot b$, gdzie $a<b-2$, otrzymujemy

$$n=\frac{a+b}{4} \qquad \text{oraz} \qquad m=\frac{b-a-2}{4}\,.$$

I tak:

- dla $a=1$, $b=1155$ otrzymujemy $m=288$, $n=289$,
- dla $a=3$, $b=385$ otrzymujemy $m=95$, $n=97$,
- dla $a=5$, $b=231$ otrzymujemy $m=56$, $n=59$,
- dla $a=7$, $b=165$ otrzymujemy $m=39$, $n=43$,
- dla $a=11$, $b=105$ otrzymujemy $m=23$, $n=29$,
- dla $a=15$, $b=77$ otrzymujemy $m=15$, $n=23$,
- dla $a=21$, $b=55$ otrzymujemy $m=8$, $n=19$.

Odpowiedź

Równanie ma 7 rozwiązań, wymienionych powyżej.

Drugie zawody indywidualne

Zadanie 9. Na tablicy narysowano 2014 kółek, 3000 krzyżyków i 5000 kwadratów. W jednym ruchu możemy wykonać jedną z następujących operacji:
- zmazać dwa kółka i narysować krzyżyk,
- zmazać dwa krzyżyki i narysować kwadrat,
- zmazać dwa kwadraty i narysować kółko.

Rozstrzygnij, czy można wykonać taki ciąg ruchów, aby na tablicy pozostały mniej niż trzy figury.

Rozwiązanie

Przypiszmy rysowanym figurom następujące liczby:

- kółko – liczba **1**,
- krzyżyk – liczba **2**,
- kwadrat – liczba **4**

i zauważmy, że każdy z dozwolonych ruchów albo nie zmienia sumy liczb przypisanych figurom narysowanym na tablicy, albo zmniejsza tę sumę o 7.

Zauważmy, że początkowo suma liczb przypisanych figurom narysowanym na tablicy jest równa

$$2014\cdot 1+3000\cdot 2+5000\cdot 4=2014+6000+20\,000=28\,014,$$

jest więc podzielna przez 7. Po dowolnym ciągu ruchów na tablicy pozostaną figury o sumie przypisanych liczb podzielnej przez 7. Ponieważ nie można zmazać wszystkich figur, a dowolna figura oraz dowolne dwie figury mają sumę liczb niepodzielną przez 7, na tablicy muszą pozostać co najmniej trzy figury.

Odpowiedź

Nie można wykonać takiego ciągu ruchów, aby na tablicy pozostały mniej niż trzy figury.

Zadanie 10. Rozstrzygnij, czy istnieje czworokąt wypukły, który nie jest trapezem, a jego przekątne dzielą go na cztery trójkąty równoramienne.

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych w takim czworokącie $ABCD$, że trójkąty APB, BPC, CPD, DPA są równoramienne. Wykażemy, że ów czworokąt musi być trapezem. Zauważmy, że $\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC=180^\circ$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\sphericalangle APB\geqslant\sphericalangle BPC$, skąd wynika, że $\sphericalangle CPD=\sphericalangle APB\geqslant 90^\circ$. W każdym trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest ostry, więc w trójkątach APB i CPD podstawami są odpowiednio odcinki AB i CD. Trójkąty APB i CPD są równoramienne oraz mają równe kąty naprzeciw podstaw, więc są podobne. Wobec tego $\sphericalangle ABP=\sphericalangle CDP$, czyli $AB\parallel CD$, a co za tym idzie, czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Nie istnieje zatem czworokąt, który spełnia warunki zadania.

Zadanie 11. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+d}{c}+\frac{c+e}{d}+\frac{d+a}{e}+\frac{e+b}{a}\geqslant 10. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Lewa strona nierówności (1) może być zapisana w postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{e}{d}+\frac{d}{e}+\frac{a}{e}+\frac{e}{a}+\frac{b}{a}=\\
&=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{e}{d}+\frac{d}{e}+\frac{a}{e}+\frac{e}{a}=\\
&=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{d}+\frac{d}{e}\right)+\left(\frac{a}{e}+\frac{e}{a}\right),
\end{aligned}$$

gdzie w każdym nawiasie występuje suma dwóch liczb dodatnich o iloczynie równym 1. Ponieważ dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywsitej x zachodzą nierówności

$$x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}+2=\frac{(x-1)^2}{x}+2\geqslant 0+2=2,$$

więc uzyskana suma jest nie mniejsza od 10, co kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź

Dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 12. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Rozwiązanie

Wskażemy dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, dla których dana nierówność jest fałszywa.

W tym celu przyjmijmy $d=1$, $c=e=10$, $a=b=100$. Wówczas

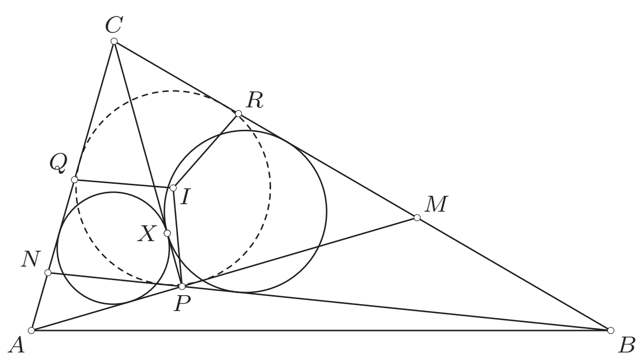
$$\begin{aligned}\frac{b}{a+c}&+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}=\\&=\frac{100}{110}+\frac{10}{101}+\frac{1}{20}+\frac{10}{101}+\frac{100}{110}=\\&=\frac{200}{110}+\frac{20}{101}+\frac{1}{20}<\frac{200}{100}+\frac{20}{100}+\frac{5}{100}=\frac{225}{100}<\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie 13. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Proste AM i BN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że w czworokąt $MPNC$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC są styczne.

Rozwiązanie

Załóżmy, że okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC są styczne. Ich punkt styczności X musi leżeć na odcinku CP. Na bokach AC i BC obierzmy punkty Q i R odpowiednio tak, że $AQ=AP$ oraz $BP=BR$ i niech punkt I będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR (rys. 5).



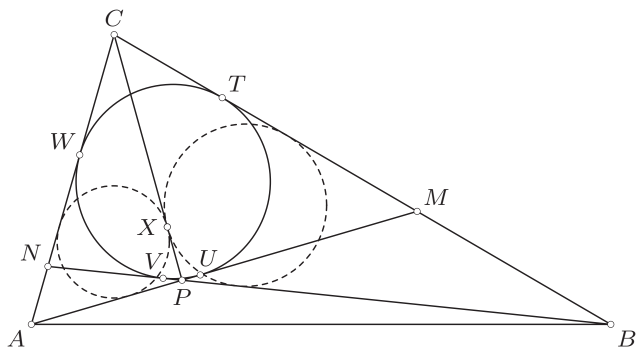
rys. 5

Rozpisując CX na dwa sposoby, dostajemy

$$\frac{AC+PC-AP}{2}=\frac{BC+PC-BP}{2},$$

zatem $AC-AP=BC-BP$, czyli innymi słowy $AC-AQ=BC-BR$. Oznacza to, że $CQ=CR$. Widzimy zatem, że czworokąty $AQIP$, $BPIR$ oraz $CRIQ$ są deltoidami. Zatem proste AI, BI oraz CI są dwusiecznymi kątów wewnętrznych PAQ, PBR oraz QCR. Zatem punkt I jest równoodległy od prostych zawierających boki czworokąta $MPNC$ i leży w części wspólnej kątów PAQ, PBR i QCR, więc leży wewnątrz czworokąta $MPNC$. To oznacza, że istnieje okrąg o środku I styczny do boków czworokąta $MPNC$ — jest to okrąg wpisany w ten czworokąt.

Załóżmy, że w czworokąt $MPNC$ można wpisać okrąg. Oznaczmy punkty styczności tego okręgu z bokami MP, PN, NC, CM odpowiednio przez U, V, W, T i niech okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC będą styczne do odcinka PC odpowiednio w punktach X i Y (rys. 6).



rys. 6

Na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych zachodzą równości:

$$BV=BT,\quad AU=AW,\quad CW=CT\quad \text{oraz}\quad PV=PU.$$

To oznacza, że

$$BC-PB=BT+CT-BV+PV=CT+PV=CW+PU=$$
$$=AW+CW-AU+PU=AC-AP.$$

Stąd wniosek, że

$$\frac{BC+PC-BP}{2}=\frac{AC+PC-AP}{2},$$

czyli $CX=CY$. Wobec tego punkt X pokrywa się z punktem Y i okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC są styczne w punkcie X.

Uwaga

Inne rozwiązanie tego zadania można znaleźć w dodatku, zamieszczonym na końcu broszury.

Zadanie 14. Na kwadratowej szachownicy o boku 2015 umieszczamy prostokąty o wymiarach 1×10 tak, że każdy z nich pokrywa 10 pól szachownicy, a przy tym żadne pole nie jest pokryte przez więcej niż jeden prostokąt. Ile co najmniej pól szachownicy musi pozostać niepokrytych?

Rozwiązanie

Sposób I

Ponumerujmy pola kwadratu jak na rysunku 7, gdzie sposób ponumerowania przedstawiono na przykładzie kwadratu o boku 25.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

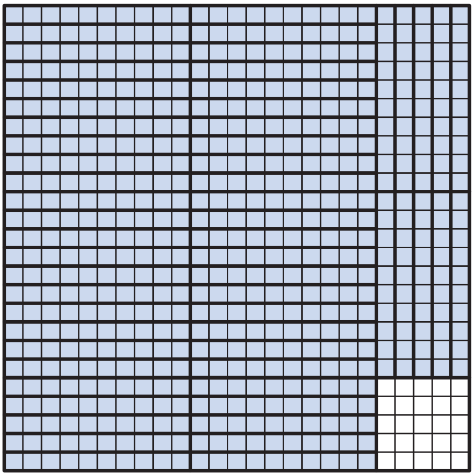
rys. 7

Zauważmy, że każdy prostokąt 1×10 pokrywający 10 pól szachownicy, pokrywa pola z różnymi numerami, a więc w szczególności pokrywa dokładnie jedno pole z liczbą 9. Ponieważ prawe dolne naroże o wymiarach 5×5 nie zawiera żadnego pola z numerem 9, a w pozostałej części szachownicy liczby pól z numerami od 0 do 9 są równe, po umieszczeniu prostokątów w sposób zgodny z warunkami zadania, co najmniej 25 pól szachownicy musi pozostać niepokrytych.

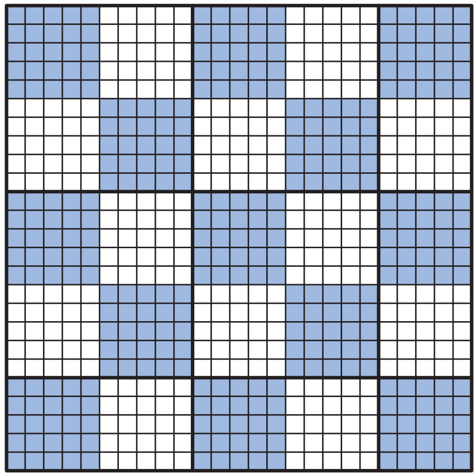
Sposób rozmieszczenia prostokątów tak, aby tylko 25 pól nie zostało pokrytych przedstawia rysunek 8.

Odpowiedź

Po rozmieszczeniu prostokątów w sposób zgodny z warunkami zadania, co najmniej 25 pól szachownicy musi pozostać niepokrytych.



rys. 8



rys. 9

Sposób II

Pokolorujmy pola kwadratu jak na rysunku 9, gdzie sposób kolorowania przedstawiono na przykładzie kwadratu o boku 25.

Wówczas każdy prostokąt 1×10 pokrywający 10 pól szachownicy, pokrywa 5 pól białych i 5 pól kolorowych. Tymczasem pól kolorowych jest o 25 więcej niż pól białych. To oznacza, że co najmniej 25 pól szachownicy musi pozostać niepokrytych.

Sposób rozmieszczenia prostokątów tak, aby tylko 25 pól nie zostało pokrytych przedstawia rysunek 8.

Odpowiedź

Po rozmieszczeniu prostokątów w sposób zgodny z warunkami zadania, co najmniej 25 pól szachownicy musi pozostać niepokrytych.

Zadanie 15. Rozstrzygnij, dla ilu liczb naturalnych $n > 1$ prawdziwe jest następujące zdanie: Dla każdej dodatniej liczby całkowitej a względnie pierwszej z n, liczba $a^6 - 1$ jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Wyznaczając liczby n spełniające warunki zadania, ograniczymy się najpierw do następujących dwóch przypadków:

1° Liczba n jest potęgą nieparzystej liczby pierwszej.

Wówczas liczba $a = 2$ jest względnie pierwsza z n i wobec tego liczba n jest dzielnikiem liczby $2^6 - 1 = 63 = 7 \cdot 9$.

Zauważmy, że dla każdej liczby całkowitej a zachodzą następujące równości:

$$a^6 - 1 = (a^3 - 1) \cdot (a^3 + 1) = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 - a + 1)\,. \qquad (1)$$

Jeżeli liczba a jest niepodzielna przez 3, to jedna z liczb $a-1$ lub $a+1$ jest podzielna przez 3, a ponadto

$$a \equiv \pm 1 \pmod 3), \quad \text{skąd} \quad a^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3).$$

W konsekwencji

$$a^2+1+a \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{lub} \quad a^2+1-a \equiv 0 \pmod 3,$$

a więc iloczyn po prawej stronie ciągu równości (1) ma dwa czynniki podzielne przez 3. Wykazaliśmy, że liczba a^6-1 jest podzielna przez 9, czyli liczba 9 i jej dzielnik 3 spełniają warunki zadania.

Jeżeli zaś liczba a jest niepodzielna przez 7, to liczba a^6-1 jest podzielna przez 7 na mocy małego twierdzenia Fermata.

Można też nie powoływać się na małe twierdzenie Fermata i zauważyć, że

$$\begin{aligned} a^6-1 &= (a-1)\cdot(a^2+a+1)\cdot(a+1)\cdot(a^2-a+1) \equiv \\ &\equiv (a-1)\cdot(a^2+a-6)\cdot(a+1)\cdot(a^2-a-6) = \\ &= (a-1)\cdot(a-2)\cdot(a+3)\cdot(a+1)\cdot(a-3)\cdot(a+2) = \\ &= (a-3)\cdot(a-2)\cdot(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot(a+3) \pmod 7. \end{aligned}$$

Liczba a wraz z sześcioma czynnikami uzyskanego iloczynu tworzy zbiór siedmiu kolejnych liczb całkowitych. Jedna z tych liczb jest podzielna przez 7. Jeżeli liczba a jest niepodzielna przez 7, to przez 7 jest podzielny jeden z czynników powyższego iloczynu i w konsekwencji cały ten iloczyn jest podzielny przez 7.

Tak więc liczba $n=7$ także spełnia warunki zadania.

2° Liczba n jest potęgą dwójki.

Wówczas liczba $a=3$ jest względnie pierwsza z n i wobec tego liczba n jest dzielnikiem liczby $3^6-1=728=8\cdot 91$. W konsekwencji n, jako potęga dwójki, jest dzielnikiem liczby 8.

Z drugiej strony, dla każdej liczby całkowitej a zachodzi równość

$$a^6-1=(a^3-1)\cdot(a^3+1),$$

a jeśli a jest nieparzysta, to czynniki po prawej stronie są kolejnymi liczbami parzystymi. Jeden z tych czynników jest podzielny przez 4, skąd wynika, że liczba a^6-1 jest podzielna przez 8. Zatem liczba 8 i jej dzielniki 2 oraz 4 spełniają warunki zadania.

Przechodzimy do wyznaczenia wszystkich liczb spełniających warunki zadania.

W tym celu wystarczy zauważyć, że liczba n będąca iloczynem dwóch liczb względnie pierwszych n_1 i n_2 spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby n_1 i n_2 spełniają warunki zadania.

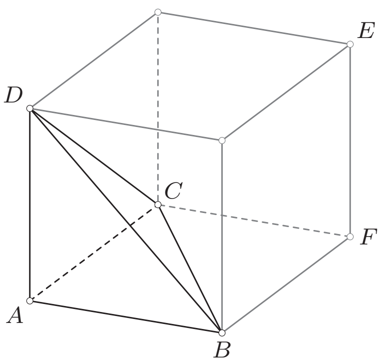
Odpowiedź

Istnieją 23 liczby spełniające warunki zadania. Są to wszystkie dzielniki liczby $7\cdot 8\cdot 9=504$ większe od 1, a mianowicie: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252 i 504.

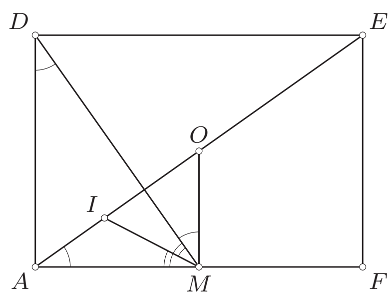
Zadanie 16. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie BCD, w którym wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A są proste oraz krawędzie boczne mają długość 1. Rozstrzygnij, czy odległość między środkami sfery wpisanej w dany ostrosłup i sfery opisanej na tym ostrosłupie jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez O i I środki odpowiednio sfery opisanej na ostrosłupie $ABCD$ i sfery wpisanej w ostrosłup $ABCD$. Zauważmy, że ostrosłup $ABCD$ jest narożem sześcianu S. Oznaczmy przez E i F wierzchołki tego sześcianu, przeciwległe odpowiednio do wierzchołków A i D (rys. 10). Wówczas punkty A, D, E, F tworzą prostokąt, którego przekątne AE i DF przecinają się w punkcie O (rys. 11). Oznaczmy jeszcze przez M środek odcinka AF.



rys. 10



rys. 11

Czworokąt $ABFC$ jest kwadratem, więc punkt M jest także środkiem odcinka BC oraz $AF=\sqrt{2}$. Płaszczyzna $ADEF$ jest płaszczyzną symetrii sześcianu S, więc jest także płaszczyzną symetrii naroża $ABCD$. Wynika stąd, że punkt I leży na płaszczyźnie $ADEF$. Co więcej, punkt I leży na płaszczyźnie dwusiecznej kąta między ścianami BCA i BCD, które są prostopadłe do płaszczyzny $ADEF$, więc leży na prostej dwusiecznej kąta AMD. Pozostałe rozważania będą prowadzone na płaszczyźnie $ADEF$. Zauważmy, że na mocy cechy bok–kąt–bok podobne są trójkąty DAM i AFE. Istotnie, kąty DAM i AFE są proste oraz

$$\frac{DA}{AM}=\sqrt{2}=\frac{AF}{FE}.$$

Prawdziwa jest zatem równość $\sphericalangle FAE=\sphericalangle ADM$. Ponadto prosta MO łączy środki odcinków AF i DF, więc jest równoległa do prostej AD. Ponadto spełnione są równości $MO=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$. Stąd $\sphericalangle ADM=\sphericalangle DMO$.

Zauważmy, że prawdziwe są równości

$$\sphericalangle MIO=\sphericalangle MAI+\sphericalangle AMI=\sphericalangle DMO+\sphericalangle DMI=\sphericalangle IMO.$$

Wynika stąd, że trójkąt MIO jest równoramienny, przy czym $IO=MO=\frac{1}{2}$, a co za tym idzie, długość odcinka IO jest liczbą wymierną.

Czwarte zawody indywidualne

Zadanie 17. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to liczba p^6+6 jest złożona.

Rozwiązanie

Dla liczby pierwszej $p \neq 7$, na mocy małego twierdzienia Fermata lub rozumowania przedstawionego w zadaniu 15, otrzymujemy

$$p^6+6 \equiv p^6-1 \equiv 0 \pmod 7,$$

zatem liczba p^6+6 jest złożona jako liczba podzielna przez 7 i większa od 7.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $p=7$. Wówczas

$$7^6+6 = 49^3+6 \equiv (-1)^3+1 = 0 \pmod 5,$$

zatem liczba 7^6+6 jest złożona jako podzielna przez 5 i większa od 5.

Zadanie 18. Udowodnij, że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniającej układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ a^3+b^3+c^3+d^3=28 \end{cases} \tag{1}$$

zachodzi nierówność

$$abc+bcd+cda+dab \geqslant -4. \tag{2}$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$S_k = a^k+b^k+c^k+d^k \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,$$

$$S_{21} = a^2b+a^2c+a^2d+b^2c+b^2d+b^2a+c^2d+c^2a+c^2b+d^2a+d^2b+d^2c$$

oraz

$$S_{111} = abc+bcd+cda+dab.$$

Wówczas zachodzą następujące tożsamości:

$$S_1^3 = S_3+3\cdot S_{21}+6\cdot S_{111}, \tag{3}$$

$$S_1\cdot S_2 = S_3+S_{21}. \tag{4}$$

Odejmując stronami od tożsamości (3) potrojoną tożsamość (4), otrzymujemy

$$S_1^3-3\cdot S_1\cdot S_2 = -2\cdot S_3+6\cdot S_{111},$$

skąd

$$S_{111} = \frac{S_1^3-3\cdot S_1\cdot S_2+2\cdot S_3}{6}. \tag{5}$$

Niech teraz a, b, c, d będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi układ równań (1), tzn.

$$S_1=4, \quad S_2=12, \quad S_3=28. \tag{6}$$

Wówczas wstawiając wartości określone w (6) do tożsamości (5), otrzymujemy

$$S_{111} = \frac{4^3 - 3\cdot 4\cdot 12 + 2\cdot 28}{6} = \frac{64 - 144 + 56}{6} = \frac{-24}{6} = -4.$$

Stąd wynika, że ma miejsce równość

$$abc + bcd + cda + dab = -4,$$

a więc w szczególności zachodzi nierówność (2).

Uwaga

Można zastanawiać się, czy w ogóle istnieją czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniające układ równań (1).

Nietrudno sprawdzić, że takimi czwórkami są na przykład

$$a = b = 1, \quad c = -1, \quad d = 3,$$
$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1 + \sqrt{3}, \quad d = 1 - \sqrt{3},$$
$$a = c = 1 + \sqrt{2}, \quad b = d = 1 - \sqrt{2},$$

lub ogólniej

$$a = 1 + x, \quad b = 1 - x, \quad c = 1 + y, \quad d = 1 - y,$$

gdzie $x^2 + y^2 = 4$.

Zadanie 19. Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $AK = BL$. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków AB i KL. Wykaż, że prosta MN jest równoległa do dwusiecznej kąta ACB.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez P i Q środki odpowiednio odcinków AL i BK (rys. 12). Skoro $PN \parallel AK$ oraz $QN \parallel BL$, to dwusieczna kąta ACB jest równoległa do dwusiecznej kąta PNQ. Ponadto równość $AK = BL$ w połączeniu z

$$MQ = \tfrac{1}{2}AK = PN \quad \text{oraz} \quad MP = \tfrac{1}{2}BL = PN$$

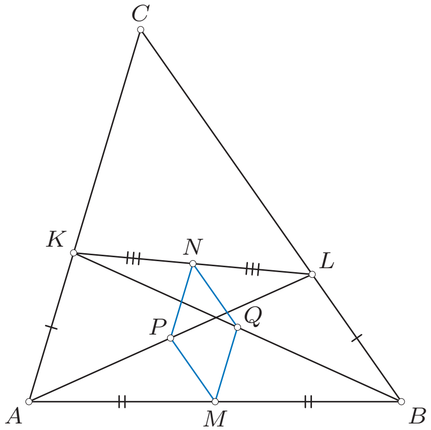
oznacza, że czworokąt $PMQN$ jest rombem. Wobec tego przekątna NM tego rombu jest dwusieczną kąta wewnętrznego PNQ i rozwiązanie jest zakończone.

Sposób II

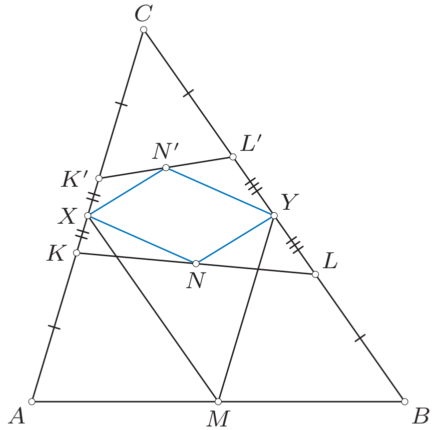
Na bokach AC i BC wybierzmy odpowiednio takie punkty K' i L', że $AK = CK'$ i $BL = CL'$ (rys. 13). Niech X, Y, N' będą odpowiednio środkami odcinków AC, BC, $K'L'$. Wówczas X i Y są również odpowiednio środkami odcinków KK' i LL'.

Na mocy znanego faktu czworokąt $XNYN'$ jest równoległobokiem, więc środki odcinków XY i NN' pokrywają się. Ponadto czworokąt $XMYC$ jest równoległobokiem, więc również środki odcinków XY i MC pokrywają się. W takim razie, skoro środki odcinków NN' i MC pokrywają się, to czworokąt $NMN'C$ jest (być może zdegenerowanym) równoległobokiem. W szczególności

$MN \parallel CN'$, co kończy rozwiązanie, gdyż CN' jest dwusieczną kąta $K'CL'$ między ramionami w trójkącie równoramiennym $K'CL'$.



rys. 12

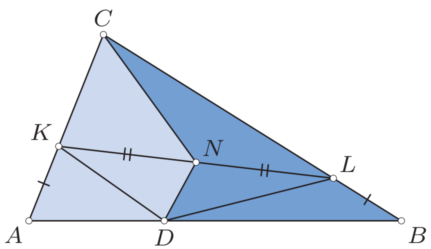


rys. 13

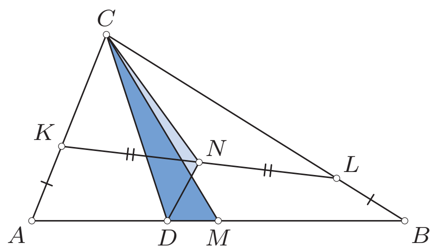
Sposób III

Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta ACB z odcinkiem AB (rys. 14). Skoro $AK = BL$ oraz odległości punktu D od prostych AC i BC są równe, to $[ADK] = [BDL]$, przy czym $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Ponadto korzystając z faktu, że dwa trójkąty mające wspólną wysokość i podstawy równej długości mają równe pola, otrzymujemy $[KDN] = [LND]$ oraz $[KNC] = [LNC]$. Dodając trzy uzyskane równości stronami, uzyskujemy

$$[ADNC] = [BDNC], \quad \text{czyli} \quad [ADNC] = \tfrac{1}{2}[ABC].$$



rys. 14



rys. 15

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $AC \leqslant BC$. Z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta ABC wynika, że

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \leqslant 1,$$

więc punkt D należy do odcinka AM (rys. 15). Analogicznie z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta CKL płynie wniosek, że punkt przecięcia prostych KL i CD należy do odcinka KN. Mamy zatem równości

$$[AMC] = [ADC] + [CDM] \quad \text{oraz} \quad [ADNC] = [ADC] + [CDN].$$

Ponieważ $[AMC]=\frac{1}{2}[ABC]=[ADNC]$, więc z powyższych równości wynika, że $[CDM]=[CDN]$. To oznacza, że odległości punktów M i N, leżących po tej samej stronie prostej CD, od prostej CD są równe. W takim razie $CD \parallel MN$, co było do udowodnienia.

Zadanie 20. Rozstrzygnij, czy w kwadracie o boku 51 można umieścić 145 kwadratów 4×4 o rozłącznych wnętrzach.

Rozwiązanie

Sposób I

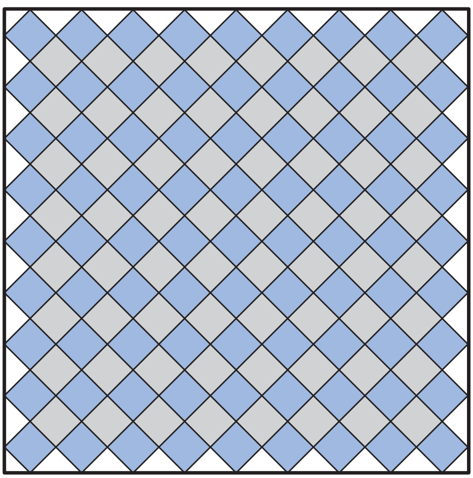
Rozmieśćmy kwadraty o boku 4 w kwadracie o boku $9\cdot 4\cdot\sqrt{2}$, jak na rysunku 16.

Liczba rozmieszczonych kwadratów jest równa $9^2+8^2=81+64=145$. Kwadraty te mieszczą się w kwadracie o boku 51, gdyż

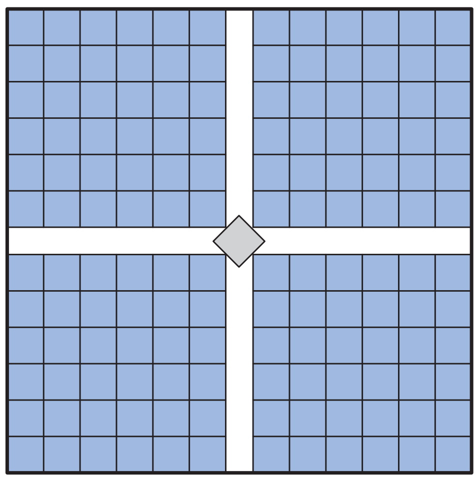
$$9\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}\right)=3\cdot\sqrt{9\cdot 16\cdot 2}=3\cdot\sqrt{288}<3\cdot\sqrt{289}=3\cdot 17=51.$$

Odpowiedź

Umieszczenie kwadratów zgodne z warunkami zadania jest możliwe.



rys. 16



rys. 17

Sposób II

Rozmieśćmy kwadraty o boku 4 w kwadracie o boku $48+2\sqrt{2}$, jak na rysunku 17.

Liczba rozmieszczonych kwadratów jest równa $4\cdot 6^2+1=145$. Kwadraty te mieszczą się w kwadracie o boku 51, gdyż

$$48+2\sqrt{2}<48+3=51.$$

Zadanie 21. Niech p będzie liczbą pierwszą. Przyjmijmy

$$a_0=p \quad\text{oraz}\quad a_{n+1}=3^{a_n}-2^{a_n} \quad\text{dla}\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

Wykaż, że jeżeli a_p jest liczbą złożoną, to liczba a_{p^2} też jest złożona.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania oprzemy na następującym lemacie:

Lemat

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k, jeżeli k jest liczbą złożoną, to liczba $3^k - 2^k$ też jest złożona.

Dowód lematu

Niech k będzie liczbą złożoną.

Wówczas istnieją takie liczby naturalne s, t większe od 1, że $k = st$. Wstawiając $x = 3^s$ oraz $y = 2^s$ do tożsamości

$$x^t - y^t = (x-y)\cdot\left(x^{t-1} + x^{t-2}y + x^{t-3}y^2 + \ldots + xy^{t-2} + y^{t-1}\right),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} &3^k - 2^k = (3^s)^t - (2^s)^t = \\ &\quad = (3^s - 2^s)\cdot\left(3^{s(t-1)} + 3^{s(t-2)}\cdot 2^s + 3^{s(t-3)}\cdot 2^{2s} + \ldots + 3^s\cdot 2^{s(t-2)} + 2^{s(t-1)}\right), \end{aligned}$$

skąd wynika, że liczba $3^k - 2^k$ jest złożona.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Z lematu wynika, że jeżeli w ciągu (a_n) występuje wyraz będący liczbą złożoną, to wszystkie wyrazy po nim następujące są złożone. Jeżeli więc a_p jest liczbą złożoną, to dla $n \geqslant p$ liczby a_n są złożone, a w szczególności liczba a_{p^2} jest złożona.

Mecz matematyczny

Zadanie 22. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite $m < n$, że $n < 1{,}001\cdot m$, a przy tym liczba n^n jest podzielna przez m^m.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $m = k^{k+1}$ oraz $n = k^k\cdot(k+1)$, gdzie dodatnia liczba całkowita k zostanie zdefiniowana później.

Wówczas $m^m = k^{k^{k+1}\cdot(k+1)}$ oraz

$$n^n = k^{k\cdot k^k\cdot(k+1)}\cdot(k+1)^{k^k\cdot(k+1)} = m^m\cdot(k+1)^{k^k\cdot(k+1)},$$

skąd wynika, że liczba n^n jest podzielna przez m^m.

Ponieważ $\frac{n}{m} = \frac{k+1}{k}$, więc nierówność $n < 1{,}001\cdot m$ jest prawdziwa, jeżeli $k > 1000$. Wystarczy więc przyjąć $k = 1001$.

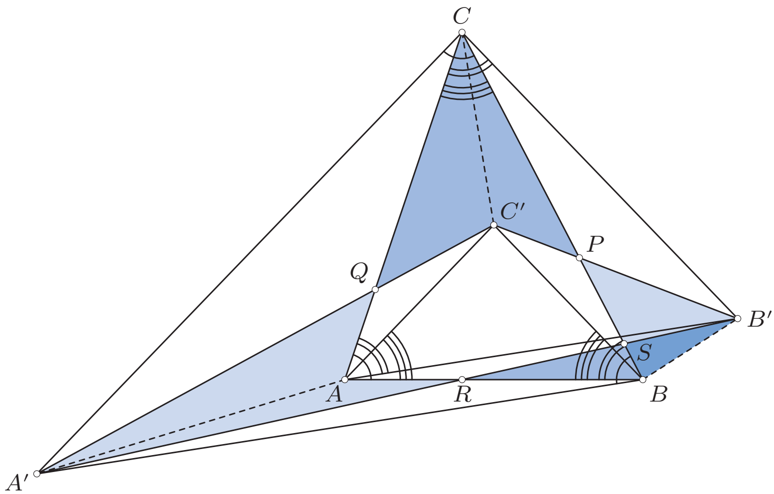
Zadanie 23. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt A' wybrano w taki sposób, że $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle A'CB = \sphericalangle BAC$ oraz punkty A, A' leżą po tej samej stronie prostej BC. Analogicznie zdefiniowano punkty B' i C'. Udowodnij, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\sphericalangle CAB \geqslant \sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle BCA$. Wówczas punkty A' i B' leżą na zewnątrz trójkąta ABC, a punkt C' leży wewnątrz tego trójkąta (rys. 18). Z równości

$$\sphericalangle ABA' = \sphericalangle CBA' - \sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAB' = \sphericalangle BAB',$$
$$\sphericalangle BCB' = \sphericalangle ACB' - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABC' = \sphericalangle CBC',$$
$$\sphericalangle CAC' = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAC' = \sphericalangle BCA' - \sphericalangle BCA = \sphericalangle ACA'$$

wynika, że $A'B \parallel AB'$, $B'C \parallel BC'$, $C'A \parallel CA'$.



rys. 18

Oznaczmy przez P, Q, R, S odpowiednio punkty przecięcia par odcinków BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$, BC i $B'A'$ (rys. 18). Dodając stronami równości pól wynikające z uzyskanych równoległości

$$[AA'R] = [BB'R], \quad [BB'P] = [CC'P], \quad [AA'Q] = [CC'Q],$$

a następnie do obu stron dodając wielkość $[ARSPC'Q] - [BB'S]$, otrzymujemy tezę zadania.

Zadanie 24. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 5^{2014} \tag{1}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c, d.

Rozwiązanie

Sposób I

Z małego twierdzenia Fermata zastosowanego do liczby pierwszej 5, wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej n niepodzielnej przez 5 zachodzi przystawanie

$$n^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Ponadto $n^4 \equiv 0 \pmod{5}$ w przypadku, gdy n jest podzielne przez 5. To oznacza, że dla liczb całkowitych a, b, c, d liczba

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie cztery liczby a, b, c, d są podzielne przez 5.

Udowodnimy nie wprost, że równanie (1) nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, c, d. Przypuśćmy, że takie rozwiązanie istnieje. Wówczas liczby a, b, c, d są podzielne przez 5 i przyjmując

$$a_1 = \frac{a}{5}, \quad b_1 = \frac{b}{5}, \quad c_1 = \frac{c}{5}, \quad d_1 = \frac{d}{5},$$

otrzymujemy

$$a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 + d_1^4 = 5^{2010}.$$

Stąd wynika, że liczby a_1, b_1, c_1, d_1 są podzielne przez 5 i możemy przyjąć

$$a_2 = \frac{a_1}{5}, \quad b_2 = \frac{b_1}{5}, \quad c_2 = \frac{c_1}{5}, \quad d_2 = \frac{d_1}{5}.$$

Wówczas

$$a_2^4 + b_2^4 + c_2^4 + d_2^4 = 5^{2006}.$$

W analogiczny sposób dochodzimy do liczb całkowitych a_{503}, b_{503}, c_{503}, d_{503} spełniających równanie

$$a_{503}^4 + b_{503}^4 + c_{503}^4 + d_{503}^4 = 25, \tag{2}$$

z którego wynika podzielność liczb a_{503}, b_{503}, c_{503}, d_{503} przez 5. Tu jednak doszliśmy do sprzeczności, gdyż lewa strona równania (2) jest podzielna przez 625, a prawa nie.

Sposób II

Zauważmy najpierw, że dla dowolnej liczby parzystej n, liczba n^4 jest podzielna przez 16, natomiast dla nieparzystej liczby n liczba

$$n^4 - 1 = (n^2+1)(n+1)(n-1)$$

jest podzielna przez 16, ponieważ każdy z trzech czynników jest parzysty, a jeden z dwóch ostatnich jest podzielny przez 4. Wobec tego czwarta potęga liczby naturalnej daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 16. Zatem liczba $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ może dawać resztę 0, 1, 2, 3 lub 4 przy dzieleniu przez 16. Natomiast, jak łatwo sprawdzić,

$$5^{2014} = 5^{2012} \cdot 5^2 = 625^{503} \cdot 25 \equiv 1^{503} \cdot 9 = 9 \pmod{16},$$

więc równość (1) nie może być spełniona. Co więcej, z powyższego rozumowania można wywnioskować, że liczby 5^{2014} nie można przedstawić nawet jako sumy ośmiu czwartych potęg liczb całkowitych.

Zadanie 25. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, którą można przedstawić na co najmniej 2014 sposobów w postaci

$$a^2 + b^3 + c^5,$$

gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Niech N będzie dużą dodatnią liczbą całkowitą, którą sprecyzujemy później.

Rozważmy wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych (a,b,c) spełniające nierówności
$$a \leqslant N^{15}, \quad b \leqslant N^{10}, \quad c \leqslant N^{6}.$$
Takich trójek jest $N^{15} \cdot N^{10} \cdot N^{6} = N^{31}$. Dla każdej takiej trójki z powyższych nierówności wynika, że
$$a^2 + b^3 + c^5 \leqslant 3 \cdot N^{30}.$$

Przyjmijmy teraz, że $N > 3 \cdot 2014$. Wówczas liczba rozważanych trójek (a,b,c) jest ponad 2014-krotnie większa od liczby możliwych wartości, jakie mogą przyjmować przyporządkowane im sumy $a^2+b^3+c^5$. Zatem pewna suma musi być przyporządkowana więcej niż 2014 trójkom, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 26. Niech S_A, S_B, S_C, S_D bedą polami powierzchni sfer dopisanych odpowiednio do ścian BCD, CDA, DAB, ABC czworościanu $ABCD$, a S niech będzie polem powierzchni sfery wpisanej w ten czworościan. Wykaż, że
$$\frac{1}{S} \leqslant \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} + \frac{1}{S_D}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez r promień sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, a przez r_A, r_B, r_C, r_D promienie sfer dopisanych odpowiednio do ścian BCD, CDA, DAB, ABC. Oznaczmy jeszcze przez I środek sfery wpisanej, a przez I_A środek sfery dopisanej do ściany BCD. Niech V_{UXYZ} oznacza objętość czworościanu $UXYZ$, a $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Wówczas prawdziwe są następujące równości:
$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABCI} + V_{BCDI} + V_{CDAI} + V_{DABI} = \\ &= \frac{r}{3} \cdot [ABC] + \frac{r}{3} \cdot [BCD] + \frac{r}{3} \cdot [CDA] + \frac{r}{3} \cdot [DAB], \end{aligned}$$
skąd wynika, że
$$\frac{1}{r} = \frac{[ABC]+[BCD]+[CDA]+[DAB]}{3V_{ABCD}}. \tag{1}$$
Podobnie uzyskujemy:
$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABCI_A} - V_{BCDI_A} + V_{CDAI_A} + V_{DABI_A} = \\ &= \frac{r_A}{3} \cdot [ABC] - \frac{r_A}{3} \cdot [BCD] + \frac{r_A}{3} \cdot [CDA] + \frac{r_A}{3} \cdot [DAB], \end{aligned}$$
skąd wniosek, że
$$\frac{1}{r_A} = \frac{[ABC]-[BCD]+[CDA]+[DAB]}{3V_{ABCD}}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{1}{r_B} = \frac{[ABC]+[BCD]-[CDA]+[DAB]}{3V_{ABCD}},$$
$$\frac{1}{r_C} = \frac{[ABC]+[BCD]+[CDA]-[DAB]}{3V_{ABCD}},$$
$$\frac{1}{r_D} = \frac{-[ABC]+[BCD]+[CDA]+[DAB]}{3V_{ABCD}}.$$

Po zsumowaniu powyższych czterech równości uzyskujemy

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} = \frac{2[ABC]+2[BCD]+2[CDA]+2[DAB]}{3V_{ABCD}}. \qquad (2)$$

Z zależności (1) i (2) wynika, że

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}. \qquad (3)$$

Po podzieleniu obu stron równania (3) przez 4 i zastosowaniu nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2r} = \frac{\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}}{4} \leqslant \sqrt{\frac{\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}}{4}}.$$

Następnie podnosimy obie strony nierówności do kwadratu:

$$\frac{1}{4r^2} \leqslant \frac{1}{4r_A^2}+\frac{1}{4r_B^2}+\frac{1}{4r_C^2}+\frac{1}{4r_D^2}.$$

Ostatnim krokiem jest podzielenie obu stron przez π i zastosowanie wzoru na pole powierzchni sfery:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \leqslant \frac{1}{4\pi r_A^2}+\frac{1}{4\pi r_B^2}+\frac{1}{4\pi r_C^2}+\frac{1}{4\pi r_D^2},$$
$$\frac{1}{S} \leqslant \frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}.$$

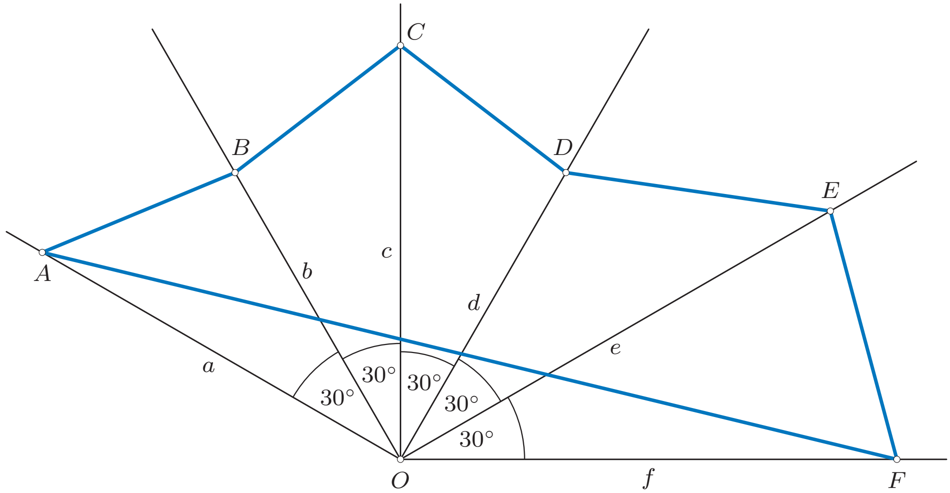
To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 27. Udowodnij, że dla każdej szóstki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2-ab\sqrt{3}+b^2}+\sqrt{b^2-bc\sqrt{3}+c^2}+\sqrt{c^2-cd\sqrt{3}+d^2}+$$
$$+\sqrt{d^2-de\sqrt{3}+e^2}+\sqrt{e^2-ef\sqrt{3}+f^2} \geqslant \sqrt{a^2+af\sqrt{3}+f^2}. \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Rozważmy odcinki OA, OB, OC, OD, OE, OF o wspólnym końcu O i długościach odpowiednio a, b, c, d, e, f, tworzące kąty $30°$ jak na rysunku 19.



rys. 19

Wówczas na mocy twierdzenia cosinusów długości odcinków AB, BC, CD, DE, EF są odpowiednio równe składnikom występującym po lewej stronie nierówności (1). Zatem lewa strona nierówności (1) jest równa długości łamanej $ABCDEF$.

Ponieważ $\sphericalangle AOF = 150^\circ$, więc z twierdzenia cosinusów wynika, że długość odcinka AF jest równa prawej stronie nierówności (1).

Prawdziwość nierówności (1) wynika z tego, że długość łamanej łaczącej dwa punkty jest nie mniejsza od długości odcinka o końcach w tych punktach.

Uwaga

Z przedstawionego rozwiązania wynika, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, f istnieje dokładnie jedna taka czwórka dodatnich liczb rzeczywistych b, c, d, e, że w nierówności (1) zachodzi równość.

Zadanie 28. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}+ \\ +\frac{b}{e+d}+\frac{c}{a+e}+\frac{d}{b+a}+\frac{e}{c+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant 5. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Sposób I

Wykażemy, że nierówność (1) jest prawdziwa.

Z nierówności między średnią harmoniczną i arytmetyczną wynika, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}. \tag{2}$$

Istotnie, zależność (2) jest równoważna nierówności

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \frac{x+y}{2},$$

która jest nierównością między średnią harmoniczną i arytmetyczną liczb x i y.

Zastosowanie zależności (2) do $x=a+c$ i $y=e+d$ prowadzi, po obustronnym przemnożeniu przez b, do

$$\frac{b}{a+c}+\frac{b}{e+d} \geqslant \frac{4b}{a+c+d+e} = \frac{4\cdot(a+b+c+d+e)}{a+c+d+e}-4\,.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{c}{b+d}+\frac{c}{a+e} \geqslant \frac{4\cdot(a+b+c+d+e)}{a+b+d+e}-4,$$

$$\frac{d}{c+e}+\frac{d}{b+a} \geqslant \frac{4\cdot(a+b+c+d+e)}{a+b+c+e}-4,$$

$$\frac{e}{d+a}+\frac{e}{c+b} \geqslant \frac{4\cdot(a+b+c+d+e)}{a+b+c+d}-4,$$

$$\frac{a}{e+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant \frac{4\cdot(a+b+c+d+e)}{b+c+d+e}-4.$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}+\frac{b}{e+d}+\frac{c}{a+e}+\frac{d}{b+a}+\frac{e}{c+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant$$
$$\geqslant 4\cdot(a+b+c+d+e)\cdot S-20, \qquad (3)$$

gdzie

$$S=\frac{1}{a+b+c+d}+\frac{1}{a+b+c+e}+\frac{1}{a+b+d+e}+\frac{1}{a+c+d+e}+\frac{1}{b+c+d+e}.$$

Analogicznie do sposobu, w jaki otrzymaliśmy nierówność (2), z nierówności między średnią harmoniczną i arytmetyczną uzyskujemy zależność

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t} \geqslant \frac{25}{x+y+z+s+t} \qquad (4)$$

prawdziwą dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z, s, t.

Wykorzystując nierówność (4), dostajemy oszacowanie

$$S \geqslant \frac{25}{4\cdot(a+b+c+d+e)}. \qquad (5)$$

Łącząc związki (3) i (5), otrzymujemy

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}+\frac{b}{e+d}+\frac{c}{a+e}+\frac{d}{b+a}+\frac{e}{c+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant$$
$$\geqslant 4\cdot(a+b+c+d+e)\cdot\frac{25}{4\cdot(a+b+c+d+e)}-20=25-20=5.$$

Sposób II

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną otrzymujemy

$$\frac{1}{b+e}+\frac{1}{b+e}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{2a} \geqslant \frac{25}{b+e+b+e+c+d+c+d+2a}.$$

Stąd wynika nierówność

$$\frac{2a}{b+e}+\frac{2a}{c+d}+\frac{1}{2} \geqslant \frac{25a}{2(a+b+c+d+e)}.$$

Po dodaniu do niej stronami czterech analogicznych nierówności, otrzymujemy (oznaczamy lewą stronę dowodzonej nierówności przez L)

$$2L+\frac{5}{2} \geqslant \frac{25(a+b+c+d+e)}{2(a+b+c+d+e)} = \frac{25}{2},$$

co daje $L \geqslant 5$.

Zadanie 29. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $AB > CD$. Punkt M jest środkiem boku AB. Proste AC, BC przecinają okrąg opisany na trójkącie CDM po raz drugi odpowiednio w punktach K, L. Proste MK, ML przecinają prostą CD odpowiednio w punktach P, Q. Wykaż, że punkt D jest środkiem odcinka PQ.

Rozwiązanie

Sposób I

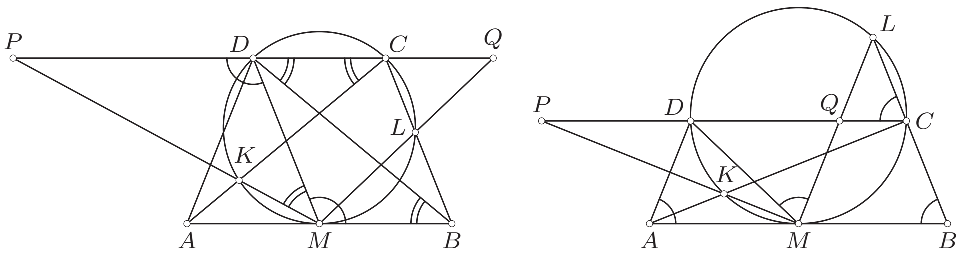
Ponieważ spełnione są równości kątów

$$\sphericalangle PDM = \sphericalangle BMD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DMK = \sphericalangle DCK = \sphericalangle BDC = \sphericalangle DBM,$$

więc na mocy cechy kąt–kąt trójkąty PDM oraz DMB są podobne. Zatem

$$\frac{PD}{DM} = \frac{DM}{MB}.$$

czyli $DM^2 = PD \cdot MB$.



rys. 20 rys. 21

Analogicznie dowodzimy podobieństwa trójkątów DMA i QDM w dwóch przypadkach:

(i) gdy punkt L leży na odcinku BC (rys. 20): $\sphericalangle DMA = \sphericalangle QDM$ oraz $\sphericalangle MAD = \sphericalangle CBM = \sphericalangle BCQ = 180° - \sphericalangle DCL = \sphericalangle DMQ$,

(ii) gdy punkt L leży poza odcinkiem BC (rys. 21): $\sphericalangle DMA = \sphericalangle QDM$ oraz $\sphericalangle MAD = \sphericalangle CBM = \sphericalangle LCD = \sphericalangle DMQ$.

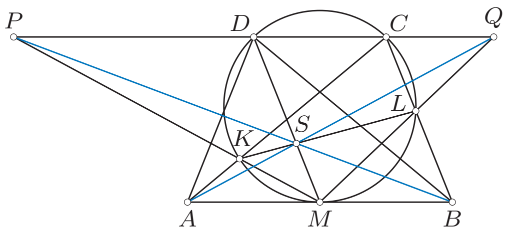
Z podobieństwa trójkątów DMA i QDM wynika, że

$$\frac{DM}{MA} = \frac{QD}{DM}.$$

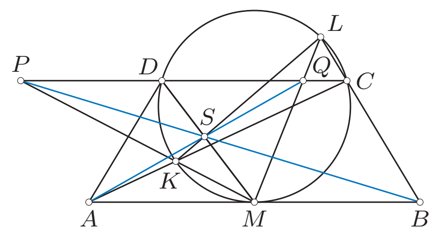
Zatem $DM^2 = QD \cdot MA$. Uwzględniając równość $MA = MB$, otrzymujemy $PD = QD$.

Sposób II

Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych KL i DM. Punkty C, D, K, L i M leżą na jednym okręgu, więc na mocy twierdzenia Pascala dla zdegenerowanego sześciokąta $MMKLCD$ na jednej prostej leżą następujące punkty: przecięcie prostej stycznej do okręgu w punkcie M z prostą LC, czyli punkt B, przecięcie prostych MK i CD, czyli punkt P oraz przecięcie prostych KL i DM, czyli punkt S.



rys. 22



rys. 23

Podobnie dla zdegenerowanego sześciokąta $MMLKCD$ dostajemy współliniowość punktów A, Q i S. Odcinki AB i PQ są równoległe, a proste AQ, BP i MD przecinają się w jednym punkcie. Zatem na mocy twierdzenia Talesa, skoro punkt M jest środkiem AB, to punkt D jest środkiem PQ.

Zadanie 30. W okrąg wpisano dwa wielokąty równokątne: 2014-kąt i 2016-kąt. Jaką największą liczbę wspólnych boków mogą mieć te dwa wielokąty?

Rozwiązanie

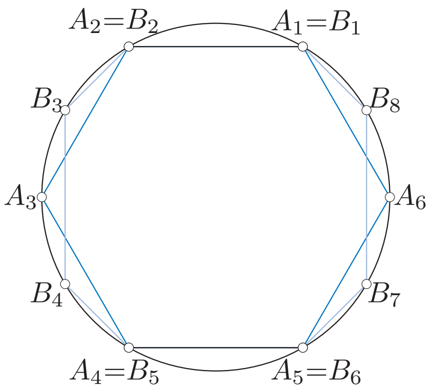
Niech $n \geqslant 2$ będzie dowolną liczbą naturalną i niech dany będzie wielokąt $P_1P_2P_3P_4 \ldots P_{2n-1}P_{2n}$ wpisany w okrąg. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) wielokąt $P_1P_2P_3P_4 \ldots P_{2n-1}P_{2n}$ jest równokątny,
(ii) $P_1P_2 = P_3P_4 = \ldots = P_{2n-1}P_{2n}$ oraz $P_2P_3 = P_4P_5 = \ldots = P_{2n}P_1$,
(iii) wielokąty $P_1P_3P_5 \ldots P_{2n-1}$ oraz $P_2P_4P_6 \ldots P_{2n}$ są foremne.

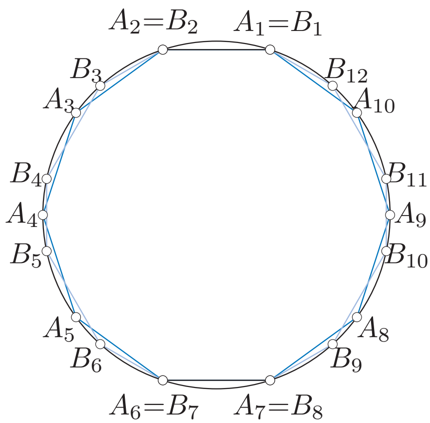
Niech teraz dane będą równokątne 2014-kąt i 2016-kąt wpisane w okrąg. Z warunku (ii) wynika, że wielokąty te nie mogą mieć wspólnych dwóch kolejnych boków. Ponieważ 1007-kąt foremny i 1008-kąt foremny wpisane w ten sam okrąg nie mogą mieć więcej niż jednego wspólnego wierzchołka, z warunku (iii) wynika, że dane w zadaniu wielokąty nie mogą mieć więcej niż 4 wspólne wierzchołki. Stąd wnioskujemy, że wielokąty te mogą mieć co najwyżej dwa wspólne boki.

Wykażemy, że istnieją wielokąty równokątne spełniające warunki zadania i mające dwa wspólne boki.

Idea konstrukcji takich wielokątów jest zaprezentowana na rysunku 24, gdzie zamiast 2014-kąta i 2016-kąta przedstawiono odpowiednio sześciokąt i ośmiokąt, a także na rysunku 25, gdzie przedstawiono odpowiednio dziesięciokąt i dwunastokąt.



rys. 24



rys. 25

Przyjmijmy, że $A_1A_2A_3A_4\ldots A_{2013}A_{2014}$ jest 2014-kątem foremnym wpisanym w okrąg, a $B_1B_2B_3B_4\ldots B_{2015}B_{2016}$ jest takim 2016-kątem równokątnym wpisanym w ten sam okrąg, że $B_1=A_1$ oraz $B_2=A_2$. Wówczas odcinki A_1A_{1008} i A_2A_{1009} są średnicami okręgu opisanego na wielokątach. Podobnie B_1B_{1009} i B_2B_{1010} są średnicami tego okręgu. Stąd wniosek, że $B_{1009}=A_{1008}$ oraz $B_{1010}=A_{1009}$. W konsekwencji wielokąty mają dwa wspólne boki, a mianowicie bok A_1A_2 2014-kąta jest jednocześnie bokiem B_1B_2 2016-kąta, a bok $A_{1008}A_{1009}$ 2014-kąta jest jednocześnie bokiem $B_{1009}B_{1010}$ 2016-kąta.

Odpowiedź

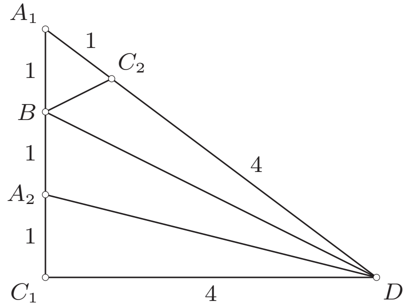
Największa liczba wspólnych boków, jakie mogą mieć wielokąty spełniające warunki zadania, jest równa dwa.

Zadanie 31. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, który ma siatkę będącą trójkątem prostokątnym.

Rozwiązanie

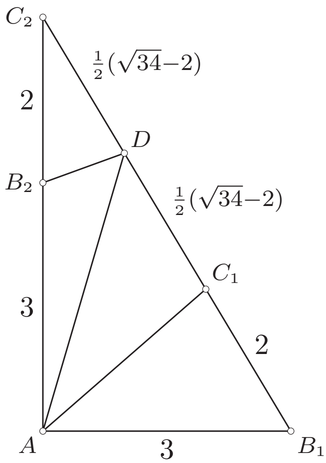
Istnieją takie czworościany. Na rysunku 26 przedstawiono przykładową siatkę.

Aby wykazać, że z przedstawionej siatki da się złożyć czworościan, wystarczy wykazać, że daje się złożyć jedno naroże. W tym celu wystarczy wykazać, że największy kąt płaski przy jednym z wierzchołków ma mniejszą miarę niż suma pozostałych kątów przy tym wierzchołku. Wystarczy więc wykazać, że $\sphericalangle BC_2D < \sphericalangle DC_1A_2 + \sphericalangle A_1C_2B$. Po uwzględnieniu równości $\sphericalangle DC_1A_2 = 90°$ oraz $\sphericalangle BC_2D + \sphericalangle A_1C_2B = 180°$, do wykazania pozostaje nierówność $\sphericalangle A_1C_2B > 45°$.

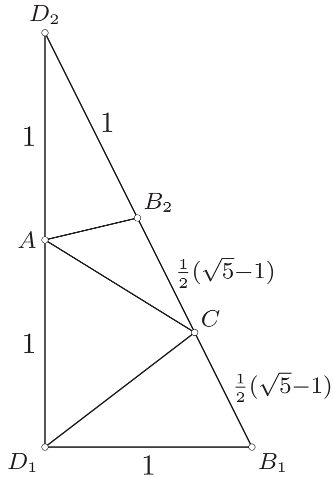


rys. 26

Jednakże $\sphericalangle A_1C_2B = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle BA_1C_2 > 90° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$, co kończy dowód. Rysunki 27 oraz 28 przedstawiają inne przykłady.



rys. 27



rys. 28

Zadanie 32. Podaj liczbę naturalną $n>1$ o następujących własnościach:
1° Dla każdej dodatniej liczby całkowitej $k<n$, Twoja drużyna potrafi przedstawić dowód następującego twierdzenia: Istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^k+k jest pierwsza.
2° Drużyna przeciwna nie potrafi udowodnić, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^n+n jest pierwsza.

Procedura referowania rozwiązania tego zadania:
Kapitan drużyny referującej **X** wskazuje liczbę n.
Kapitan drużyny przeciwnej **Y** wskazuje **jedną** liczbę $k<n$.
Drużyna **X** przedstawia, na ogólnych zasadach rozgrywki meczowej, dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie 1° dla wskazanej liczby k.
Drużyna **Y**, w ramach formułowania usterek przedstawionego rozwiązania, może zaprezentować dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie 2°. Dowód ten przedstawia zawodnik wydelegowany przez kapitana drużyny **Y**, bez możliwości zmiany osoby referującej. Uznanie tego dowodu za poprawny oznacza automatyczne uznanie rozwiązania drużyny **X** za błędne.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania oprzemy na następującym lemacie:

Lemat

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą, a q taką liczbą pierwszą, że $q-1\,|\,k$ oraz $q\,|\,k{+}1$, czyli

$$k\equiv q-1 \pmod{q\cdot(q-1)}.$$

Wówczas dla dowolnej liczby m niepodzielnej przez q, liczba m^k+k jest podzielna przez q.

Dowód lematu

Niech $t=\frac{k}{q-1}$. Korzystając z małego twierdzenia Fermata, otrzymujemy

$$m^k+k=\left(m^{q-1}\right)^t+k\equiv 1^t+k=k+1\equiv 0 \pmod{q},$$

co kończy dowód lematu.

Przystępujemy do rozwiązania zadania. Zauważmy (zob. tabela poniżej), że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $k<34$ istnieje liczba pierwsza q spełniająca warunki lematu.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
q	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19

k	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
q	2	3	2	23	2	5	2	3	2	29	2	31	2	3	2

To oznacza, że dla każdej liczby pierwszej $p\neq q$ liczba p^k+k jest podzielna przez q, a ponieważ

$$p^k+k\geqslant 2^{q-1}+(q-1)>q,$$

więc liczba ta jest złożona. Zatem co najwyżej jedna liczba postaci p^k+k może być pierwsza. Jedyną liczbą, której złożoności nie wykazaliśmy, jest q^k+k.

Odpowiedź

Udowodniliśmy, że twierdzenie sformułowane w punkcie 1° jest prawdziwe dla każdej dodatniej liczby całkowitej $k<34$.

Uwaga 1.

Można sprawdzić, że liczba q^k+k jest pierwsza dla $k=1,2,3,5,8,9,15,30$.

Uwaga 2.

Jeżeli $k=34$, to liczby pierwsze postaci $p^{34}+34$ otrzymujemy dla pięciu liczb pierwszych $p<1000$, a mianowicie $p=3$, $p=7$, $p=103$, $p=283$ i $p=677$. Wydaje się więc mało prawdopodobne, aby udało się rozstrzygnąć, czy zbiór liczb pierwszych p, dla których liczba $p^{34}+34$ jest pierwsza, jest skończony.

Dodatek: Okręgi wpisane i dopisane do czworokąta

Niniejszy tekst poświęcony jest zwięzłej prezentacji użytecznych faktów dotyczących własności czworokątów, w które można wpisać okrąg, lub do których można dopisać okrąg.

Twierdzenie o stycznych do okręgu

Jeżeli okrąg o, wpisany w kąt o wierzchołku P, jest styczny do ramion tego kąta w punktach A i B, to $PA=PB$.

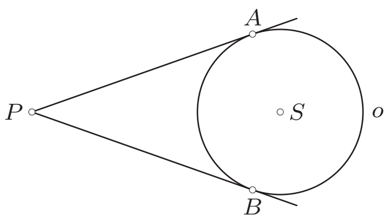
Dla dowodu wystarczy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa:

$$PA^2=PS^2-r^2=PB^2,$$

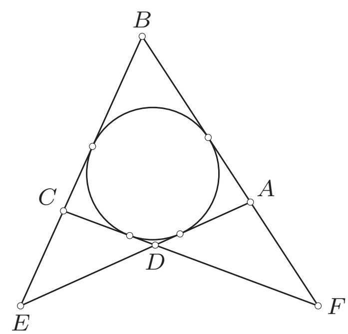
przy czym punkt S jest środkiem okręgu o, a r promieniem tego okręgu.

Uwaga

Długość odcinka PA oznaczać będziemy symbolem Po: $Po=PA=PB$.



rys. 29



rys. 30

Twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt

Dany jest trójkąt BEF. Punkty A i C należą odpowiednio do boków BF i BE tego trójkąta. Odcinki AE i CF przecinają się w punkcie D. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1° *w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg;*
2° $AB+CD=AD+BC$;
3° $DE+BF=DF+BE$;
4° $AE+AF=CE+CF$.

Dowód

Zaczniemy od wykazania równoważności warunków 1° i 2°.

$1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$

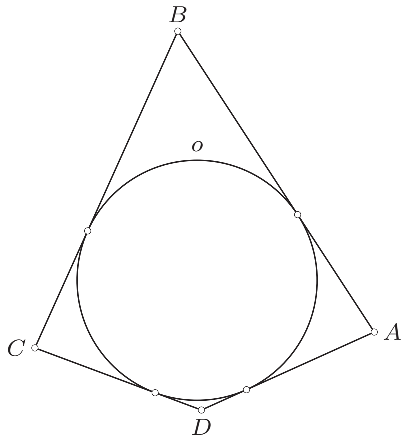
Przypuśćmy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg o (rys. 31). Wówczas

$$AB+CD=Ao+Bo+Co+Do=Ao+Do+Bo+Co=AD+BC.$$

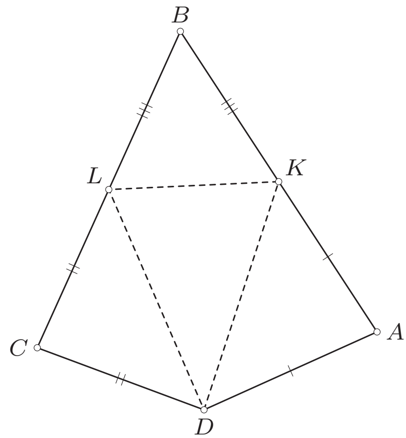
$2^\circ \Longrightarrow 1^\circ$

Załóżmy, że czworokąt wypukły $ABCD$ spełnia warunek 2°. Skoro punkty E i F istnieją, to czworokąt $ABCD$ nie może być rombem. W takim razie bez zmniejszania ogólności dowodu możemy założyć, że $AB > AD$ (rys. 32). Na bokach AB i CB wyznaczmy takie punkty K i L, aby $AD = AK$ i $CD = CL$. Wówczas z warunku 2° wynika, że $BK = BL$.

Dwusieczne kątów A, B i C czworokąta $ABCD$ są symetralnymi boków trójkąta KLD, więc przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt przecięcia jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$.



rys. 31



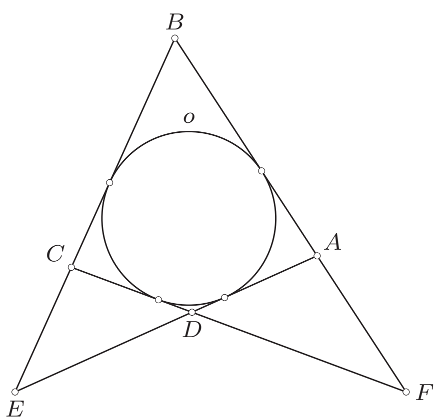
rys. 32

Wykażemy teraz równoważność warunków 1° i 3°.

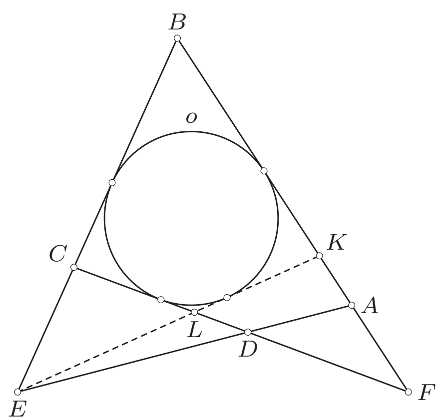
$1^\circ \Longrightarrow 3^\circ$

Przypuśćmy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg o (rys. 33). Wówczas

$$DE + BF = Eo - Do + Bo + Fo = Fo - Do + Bo + Eo = DF + BE.$$



rys. 33



rys. 34

$3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$

Ten dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że spełniony jest warunek 3°, a w czworokąt $ABCD$ nie można wpisać okręgu. Wpiszmy okrąg o w trójkąt BCF i poprowadźmy prostą EK, styczną do okręgu o, jak na rysunku 34. Punkt przecięcia prostych EK i CF oznaczmy L.

Wówczas okrąg o byłby wpisany w czworokąt wypukły $KBCL$. Stąd i z warunku 3° mielibyśmy:

$$LE+BF=LF+BE \quad \text{oraz} \quad DE+BF=DF+BE.$$

Po odjęciu stronami tych równości otrzymalibyśmy $LE-DE=LD$, czyli $DL+LE=DE$, co prowadziłoby do sprzeczności.

Wykażemy teraz równoważność warunków 1° i 4°.

$1^\circ \Longrightarrow 4^\circ$

Przypuśćmy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg o (rys. 35). Wówczas

$$AE+AF=Ao+Eo+Fo-Ao=Eo+Fo=Eo-Co+Co+Fo=CE+CF.$$

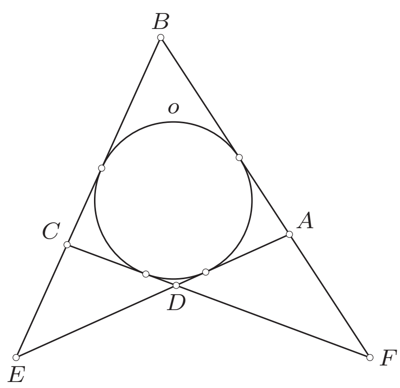
$4^\circ \Longrightarrow 1^\circ$

Ten dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że spełniony jest warunek 4°, a w czworokąt $ABCD$ nie można wpisać okręgu. Wpiszmy okrąg o w trójkąt BCF i poprowadźmy prostą EK, styczną do okręgu o, jak na rysunku 36. Punkt przecięcia prostych EK i CF oznaczmy L.

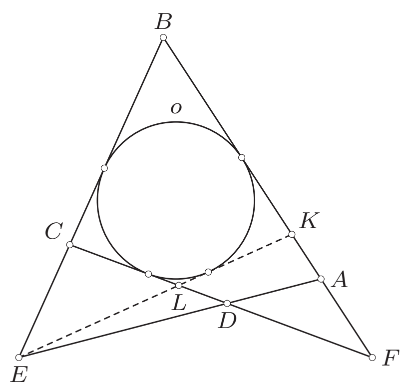
Wówczas okrąg o byłby wpisany w czworokąt wypukły $KBCL$. Stąd, na mocy implikacji $1^\circ \Longrightarrow 4^\circ$ i warunku 4° mielibyśmy:

$$KE+KF=CE+CF \quad \text{oraz} \quad AE+AF=CE+CF.$$

Po odjęciu stronami tych równości otrzymalibyśmy $KE-AE+AK=0$, czyli $AK+KE=AE$, co prowadziłoby do sprzeczności.



rys. 35



rys. 36

Dowód twierdzenia został zakończony.

Twierdzenie o okręgu dopisanym do czworokąta

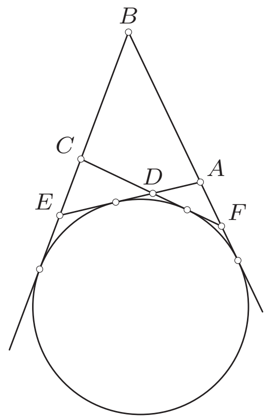
Dany jest trójkąt BEF. Punkty A i C należą odpowiednio do boków BF i BE tego trójkąta. Odcinki AE i CF przecinają się w punkcie D. Wówczas następujące warunki są równoważne:

5° *do czworokąta wypukłego $ABCD$ można dopisać okrąg, jak przedstawiono na rysunku 37;*

6° $AB+AD=CB+CD$;

7° $EB+ED=FB+FD$;

8° $EA+EC=FA+FC$.

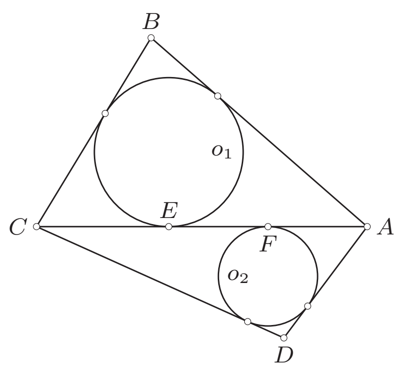


rys. 37

Dowody równoważności powyższych warunków można przeprowadzić analogicznie do dowodów równoważności warunków 1°–4°.

Jeszcze jedno twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt

W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne.



rys. 38

Dowód

Wpiszmy w trójkąty ABC i ADC odpowiednio okręgi o_1 i o_2, styczne do odcinka AC w punktach E i F, jak na rysunku 38. Wówczas

$$\begin{aligned} AB+CD &= Ao_1+Bo_1+Co_2+Do_2 = \\ &= Ao_2+EF+Bo_1+Co_1+EF+Do_2 = \\ &= AD+BC+2\cdot EF. \end{aligned}$$

Teraz wystarczy powołać się na równoważność warunków 1° i 2°.

Uwaga

Dowód nie ulegnie zmianie, jeśli kąt A lub kąt C czworokąta $ABCD$ będzie wklęsły.

I na koniec dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 1.

Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Wykazać, że okręgi wpisane w trójkąty ABD i CBD są styczne.

Zadanie 2.

Dany jest trójkąt BEF. Punkty A i C należą odpowiednio do boków BF i BE tego trójkąta, odcinki AE i CF przecinają się w punkcie D. Wykazać, że jeśli $AB+AD=CB+CD$, to $EB+ED=FB+FD$.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6 – 11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6 – 11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści