Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OMJ

22–29 maja 2022 r.

Skład komputerowy: Kosma Kasprzak, Piotr Kuc, Hai An Mai, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora, Stefan Świerczewski

Rysunki: Hai An Mai, Stefan Świerczewski

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy OMJ (poziom OMJ) odbył się w dniach 22 – 29 maja 2022 r. w ośrodku „Gronik” w Szczyrku — wracając po trzech latach przerwy do formy stacjonarnej. Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej — pracując zarówno w grupach, jak i indywidualnie. Obok codziennych omówień zadań, uczniowie brali również udział w wykładach oraz rozmaitych formach rekreacji.

W Obozie Naukowym na poziomie OMJ udział wzięło 20 najlepszych uczestników XVII OMJ z klas siódmych i młodszych (zarówno uczestników drugiego, jak i trzeciego etapu), w tym (po raz pierwszy) jeden czwartoklasista i jeden piątoklasista. Od roku 2019 w zawodach OMJ startują wyłącznie uczniowie szkół podstawowych. Uczestnicy Obozów Naukowych są więc o rok młodsi od swoich poprzedników.

W odróżnieniu od lat poprzednich zrezygnowano z tradycyjnego podziału problemów na zawody indywidualne i zadania na mecz matematyczny. Przez pierwsze dwa dni Obozu Naukowego uczestnicy pracowali w grupach, referując rozwiązania zadań w ramach meczu matematycznego prowadzonego w uproszczonej formie. Przez kolejne trzy dni zadania rozwiązywane były w formie indywidualnej. W sobotę natomiast rozegrano zawody drużynowe w formule Náboja Matematycznego.

W niniejszym opracowaniu zgromadzone są wszystkie zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Tematyka i trudność zadań nawiązują przede wszystkim do poziomu zawodów okręgowych i finałowych Olimpiady Matematycznej Juniorów, a miejscami także do zadań z międzynarodowych zawodów juniorskich, między innymi CPSJ. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów. Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Anna Bryłowska, Zuzanna Buraczewska, Antoni Chwiejczak, Tymoteusz Czapkowski, Dominik Findeisen, Michał Franciszek Fronczek, Maria Janyska, Michał Jaśkowski, Filip Klim, Jan Kosiorowski, Mariia Kulyk, Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak, Tomasz Ostrowski, Kajetan Sosnowski, Igor Sudyka, Jakub Wasilewski, Adam Wiatr, Mateusz Wilgosz, Michał Wolny, Jakub Zagrodzki.

Kadra: Tomasz Szymczyk (kierownik), Łukasz Bożyk, Kosma Kasprzak, Piotr Kuc, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora.

Treści zadań

Zadanie 1.

Czy istnieje (co najmniej dwucyfrowa) liczba postaci $100\ldots01$, która jest kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c wszystkie mają identyczne cyfry jedności. Wykaż, że przynajmniej jedna z liczb a^2+2019, b^2+2020, c^2+2021 jest podzielna przez 5.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: jeżeli liczba całkowita $m \geqslant 1$ ma sumę cyfr równą n, to jest ona podzielna przez n.

Zadanie 4.

Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC znajduje się taki punkt P, że

$$\sphericalangle PAB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle PBC = \tfrac{1}{3}\sphericalangle PCA.$$

Wyznacz miarę kąta PAB.

Zadanie 5.

Niech $ABCDE$ będzie takim pięciokątem wypukłym, że czworokąt $ABDE$ jest kwadratem, a trójkąt BCD jest równoboczny. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AD i CE. Wykaż, że $PA = PC$.

Zadanie 6.

Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f, g, h spełniają warunki

$$a+b=c+d=e+f=g+h \quad \text{oraz} \quad b+c=d+e=f+g=h+a.$$

Udowodnij, że $a=e$.

Zadanie 7.

Wszystkie kąty wewnętrzne sześciokąta $ABCDEF$ są równe. Udowodnij, że

$$AB-DE=EF-BC=CD-FA.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że istnieją liczby całkowite x, y większe od 999, dla których liczba

$$1 + 2^x + 2^y$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: pewne trzy dodatnie dzielniki a, b, c liczby n spełniają równość $a + b + c + abc = n$.

Zadanie 10.

Niech n oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Rozważamy kartkę w kratkę rozmiaru $n \times m$ złożoną z nm pól rozmiaru 1×1. *Prostokątem* rozmiaru $r \times s$ nazywamy zbiór pól zawartych w tej kartce złożony z rs pól rozmiaru 1×1, gdzie $r \leqslant n$, $s \leqslant m$, ułożonych w r kolejnych wierszach i s kolejnych kolumnach kartki. Każde pole na rozważanej kartce w kratkę pomalowano na czarno lub biało. Okazało się, że każdy prostokąt rozmiaru $r \times s$, taki że liczba rs pól tego prostokąta jest podzielna przez 4, zawiera taką samą liczbę białych i czarnych pól. Czy wynika z tego, że kartka została pomalowana w *szachownicę*, to jest. tak, że każde dwa sąsiednie pola mają różny kolor?

Zadanie 11.

Ile co najmniej liczb trzeba usunąć ze zbioru

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots, 20,\ 21,\ 22,$$

aby wśród pozostałych liczb żadna nie była dzielnikiem innej?

Zadanie 12.

Na płaszczyźnie wybrano 6 punktów tak, aby żadne trzy nie były współliniowe, i aby odległości pomiędzy wybranym punktami były parami różne. Rozważmy wszystkie odcinki o końcach w wybranych punktach. Udowodnij, że jeden z tych odcinków jest zarazem najdłuższym bokiem w pewnym z powstałych trójkątów i najkrótszym bokiem w innym powstałym trójkącie.

Zadanie 13.

Dane są dodatnia liczba całkowita n oraz liczba pierwsza p. Załóżmy, że liczby $13n + 2022$ oraz $n - 2$ są podzielne przez p. Udowodnij, że również liczba $2023n + 18$ jest podzielna przez p.

Zadanie 14.

Kosma stoi przed tablicą, na której napisane są nieparzyste liczby całkowite o sumie równej k. Co minutę Kosma wybiera jedną z liczb na tablicy, zmazuje ją i w jej miejsce wpisuje jej sześcian. Czy jest możliwe, aby w pewnym momencie po ruchu Kosmy suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy była równa $k + 12$?

Zadanie 15.

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest środkiem odcinka AD, punkt F jest środkiem odcinka BE, a punkt G jest środkiem odcinka CF. Udowodnij, że pole trójkąta EFG jest 8 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Zadanie 16.

Niech $ABCDE$ będzie takim pięciokątem wypukłym, że czworokąt $ABDE$ jest kwadratem, a trójkąt BCD jest równoboczny. Niech P będzie takim punktem, że trójkąt CEP jest równoboczny, przy czym P jest po tej samej stronie prostej CE co punkt D. Wyznacz miarę kąta PAE.

Zadanie 17.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba $2(a^4 + b^4 + (a + b)^4)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 18.

Rozstrzygnij, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 111, \\ 4b + 5a + 6c = 78. \end{cases}$$

Zadanie 19.

W kinie Słoneczko jest pewna sala, w której miejsca są ponumerowane liczbami naturalnymi od 1 do 100. Pewnego dnia 100 widzów przyszło na wspólny seans, a po przerwie wszyscy wrócili do sali na następny seans, zmieniając jednak miejsca siedzenia. Udowodnij, że jeśli każdy ze 100 widzów policzy różnicę między większym a mniejszym numerem miejsc, na których siedział podczas dwóch seansów, to suma tych stu liczb jest parzysta.

Zadanie 20.

Jaś ma prawą i lewą rękawiczkę, prawą i lewą skarpetkę oraz prawy i lewy but. Zakłada on na siebie te ubrania jedno po drugim w pewnej kolejności, przy czym nie zakłada skarpetki na but. Na ile sposobów Jaś jest w stanie poprawnie się ubrać?

Zadanie 21.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zadanie 22.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$\mathrm{NWD}(a+c, b+c) = a+b.$$

Wykaż, że $a = b = c$.

Zadanie 23.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie X. Obwody trójkątów ABX i CDX równe są odpowiednio 3 oraz 1. Wykaż, że suma obwodów trójkątów BCX i DAX jest nie większa od 8.

Zadanie 24.

W 2022-kącie foremnym poprowadzono 19 przekątnych, z których żadne dwie nie przecinają się we wnętrzu wielokąta (mogą mieć jednak wspólne końce), i które dzielą ten 2022-kąt foremny na pewną liczbę wielokątów. Udowodnij, że pewien wielokąt powstały w wyniku tego podziału ma co najmniej 103 wierzchołki.

Zadanie 25.

Niech a, b, c będą długościami boków w trójkącie o polu S. Udowodnij, że

$$S \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Zadanie 26.

Piotrek ma wagę szalkową oraz zestaw 10 odważników o różnych masach będących liczbami całkowitymi z przedziału od 1 do 100. Udowodnij, że stawiając swe odważniki na szalach, Piotrek może uzyskać równowagę.

Zadanie 27.

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Niech E będzie takim punktem na boku AD, że $\sphericalangle BEA = \sphericalangle CED$. Wykaż, że

$$(AB + CD)^2 + AD^2 = (BE + CE)^2.$$

Zadanie 28.

Znajdź wszystkie liczby naturalne n, których najmniejszy dzielnik większy od 1 jest 45 razy mniejszy od największego dzielnika właściwego (mniejszego od n).

Zadanie 29.

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek liczb naturalnych a, b, c, d większych od 1000, takich że liczby c, d są względnie pierwsze oraz

$$a^2 + b^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

Zadanie 30.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+d} + \frac{d}{3d+a} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Zadanie 31.

Na patyku stoi pewna liczba mrówek. W pewnym momencie wszystkie mrówki zaczynają się poruszać ze stałą prędkością równą (temu) jednemu patykowi na minutę. Gdy dwie mrówki wpadną na siebie, zmieniają kierunek i ruszają w przeciwne strony (nie zmieniając prędkości). Jeżeli mrówka dojdzie do końca patyka, to spada na ziemię. Udowodnij, że po minucie wszystkie mrówki spadną z patyka.

Zadanie 32.

Niech N będzie punktem wewnętrznym rombu $ABCD$, takim że trójkąt BNC jest równoboczny. Dwusieczna kąta ABN przecina prostą AC w punkcie K. Wykaż, że

$$BK = KN + ND.$$

Zadanie 33.

Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)=1.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy $a+b$.

Zadanie 34.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a+b+c=1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność:

$$\frac{ab+c}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc+a}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac+b}{(a+b)(b+c)}\geqslant 3.$$

Zadanie 35.

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki $x+y+z=2$ oraz $xy+yz+zx=1$. Wyznacz największą możliwą wartość liczby $x-y$.

Zadanie 36.

Przy dwóch n-osobowych stołach siedziało początkowo $2n$ osób. W pewnym momencie wystartował następujący proces: co minutę pewne dwie osoby, które nie siedziały przy tym samym stole, zamieniały się miejscami. Proces zatrzymał się, gdy każda para osób zamieniła się miejscami dokładnie raz. Udowodnij, że jeżeli na początku pewne dwie osoby siedziały przy tym samym stole, to po zakończeniu procesu te dwie osoby również siedziały przy tym samym stole.

Zadanie 37.

Wyznacz najmniejszą liczbę pól szachownicy rozmiaru 8×8, które wystarczy przemalować z koloru białego na czarny lub z koloru czarnego na biały, aby uzyskać sytuację, w której żadne dwa pola graniczące tylko jednym narożnikiem nie są tego samego koloru (pola graniczące całym wspólnym bokiem mogą mieć ten sam kolor).

Zadanie 38.

Dany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że czworokąty $ABCD$, $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$ są trapezami. Każdy z tych trapezów ma parę równoległych boków złożoną z boku i przekątnej pięciokąta $ABCDE$. Udowodnij, że czworokąt $EABC$ też jest trapezem.

Zadanie 39.

Król Kosma ucieka do swojej wieży. Stoi on w lewym dolnym polu szachownicy rozmiaru $n \times n$. Na każdym polu tej szachownicy stoi drogowskaz wskazujący w prawo, w lewo, w górę, bądź w dół. Król Kosma w każdym ruchu wykonuje dwie czynności — po pierwsze: idzie w stronę, w którą wskazuje drogowskaz stojący na jego polu, a po drugie: aby zmylić pościg obraca drogowskaz za sobą o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Gdyby Król Kosma nie miał możliwości przejścia na pole wskazywane przez drogowskaz, innymi słowy jeśli miałby wyjść poza krawędź tabeli, to nie wykonuje ruchu, a jedynie obraca drogowskaz. Udowodnij, że Król Kosma trafi po pewnej liczbie ruchów do wieży, która stoi w prawym górnym rogu szachownicy.

Zadanie 40.

Niech ABC będzie trójkątem. w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 20^\circ$. Na boku BC wybrano taki punkt D, że zachodzi równość $CD = AB$. Wykaż, że $\sphericalangle ADB = 30^\circ$.

Zadanie 41.

Dane są kwadraty $ABCD$ i $AEGF$. Niech H będzie takim punktem na odcinku ED, że prosta AH jest prostopadła do prostej FB. Załóżmy przy tym, że $AH = 4$. Wyznacz długość odcinka BF.

Zadanie 42.

Znajdź wszystkie takie trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c, dla których liczba $3^a + 3^b + 3^c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 43.

Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba $n = (5k + 1)^2$ ma nieparzyście wiele dzielników dodatnich dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

Zadanie 44.

Powiemy, że liczba całkowita n większa od 1 jest *fajna*, jeśli w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każdy niezerowy wykładnik jest większy od 1, tzn. dla każdej liczby pierwszej p zachodzi implikacja: jeśli p jest dzielnikiem n, to również p^2 jest dzielnikiem n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par kolejnych liczb całkowitych, które są fajne.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Czy istnieje (co najmniej dwucyfrowa) liczba postaci $100\ldots01$, która jest kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że istnieje liczba całkowita n, dla której liczba n^2 jest postaci $100\ldots01$. Wówczas liczba n^2-2 jest postaci $99\ldots9$, więc jest liczbą podzielną przez 3. To oznacza, że liczby $n^2-1=(n-1)(n+1)$ oraz n^2 nie są podzielne przez 3 i w konsekwencji — żadna z liczb $n-1$, n, $n+1$ nie jest podzielna przez 3. Uzyskujemy sprzeczność, gdyż pośród każdych trzech kolejnych liczb całkowitych jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Zatem nie istnieje liczba o własności opisanej w zadaniu.

Uwaga. Rozwiązanie można również przeprowadzić korzystając z obserwacji mówiącej, że kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 1.

Zadanie 2.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c wszystkie mają identyczne cyfry jedności. Wykaż, że przynajmniej jedna z liczb a^2+2019, b^2+2020, c^2+2021 jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie: Gdy cyfra jedności liczby a równa jest 1, 4, 6 lub 9, wówczas cyfra jedności liczby a^2+2019 równa jest 0 lub 5, więc liczba ta jest podzielna przez 5.

W przypadku, gdy cyfra jedności liczby b równa jest 0 lub 5, liczba b^2+2020 jest podzielna przez 5.

Wreszcie, w przypadku gdy cyfra jedności liczby c równa jest 2, 3, 7 lub 8, liczba c^2+2021 jest podzielna przez 5.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: jeżeli liczba całkowita $m \geqslant 1$ ma sumę cyfr równą n, to jest ona podzielna przez n.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że liczba n ma opisaną własność i rozważmy liczbę k, której zapis dziesiętny złożony jest z n jedynek. Wówczas liczba $k+9$ także ma sumę cyfr równą n, skąd wniosek, że jest to liczba podzielna przez n. W konsekwencji również $(k+9)-k=9$ jest liczbą podzielną przez n, co daje trzy przypadki: $n=1$, $n=3$ lub $n=9$. Łatwo zweryfikować, że te trzy liczby spełniają warunki zadania.

Zadanie 4.

Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC znajduje się taki punkt P, że

$$\sphericalangle PAB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle PBC = \tfrac{1}{3}\sphericalangle PCA.$$

Wyznacz miarę kąta PAB.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że $\sphericalangle PAB = \alpha$. Wtedy $\sphericalangle PBC = 2\alpha$ i $\sphericalangle PCA = 3\alpha$. Wówczas

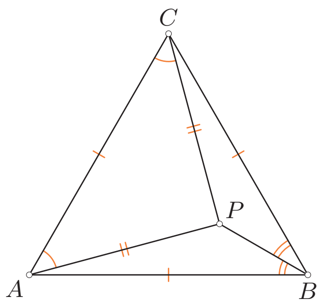
$$\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle PAB - \sphericalangle PBA = 180^\circ - \alpha - (60^\circ - 2\alpha) = 120^\circ + \alpha,$$

i podobnie

$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB = 180^\circ - 2\alpha - (60^\circ - 3\alpha) = 120^\circ + \alpha.$$

Zatem w trójkątach ABP i CBP mamy:

- równe długości boków AB oraz BC,
- wspólny bok PB,
- równe kąty wewnętrzne (rozwarte) przy wierzchołku P.



rys. 1

Korzystając z tzw. *czwartej cechy przystawania trójkątów* (bok–bok–kąt nieostry), uzyskujemy, że trójkąty ABP i CBP są przystające. Stąd $AP = CP$. Uzyskujemy w szczególności równość $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA$, czyli $3\alpha = 60^\circ - \alpha$, skąd $\alpha = 15^\circ$.

Uwaga. Używając określenia *kąt nieostry*, mamy na myśli taki kąt wewnętrzny trójkąta, który nie jest kątem ostrym, tzn. kąt o mierze nie mniejszej od 90° i mniejszej od 180°. Zachęcamy Czytelnika do uzasadnienia *czwartej cechy przystawania*.

Zadanie 5.

Niech $ABCDE$ będzie takim pięciokątem wypukłym, że czworokąt $ABDE$ jest kwadratem, a trójkąt BCD jest równoboczny. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AD i CE. Wykaż, że $PA = PC$.

Rozwiązanie: Z warunków zadania wynika, że $BA = BD = BC$. W szczególności trójkąt ABC jest równoramienny, skąd

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ.$$

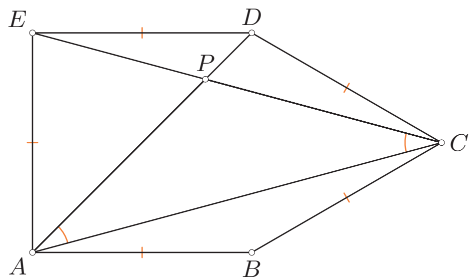
Z symetrii rozważanej konfiguracji wynika, że $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DCE = \sphericalangle BCA = 15^\circ$. Z równości tych wynika, że

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle DAB - \sphericalangle BAC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

Z drugiej strony mamy

$$\sphericalangle PCA = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA - \sphericalangle DCE = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ = \sphericalangle PAC.$$

Z równości kątów PAC oraz PCA wynika, że trójkąt PAC jest równoramienny. Stąd $PA = PC$.



rys. 2

Zadanie 6.

Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f, g, h spełniają warunki

$$a + b = c + d = e + f = g + h \quad \text{oraz} \quad b + c = d + e = f + g = h + a.$$

Udowodnij, że $a = e$.

Rozwiązanie: Suma liczb $a+b$, $c+d$, $e+f$, $g+h$ równa jest sumie liczb $b+c$, $d+e$, $f+g$, $h+a$. Stąd wszystkie z wypisanych ośmiu składników są równe. W szczególności $a+b=b+c$ oraz $c+d=d+e$, czyli $a=c=e$.

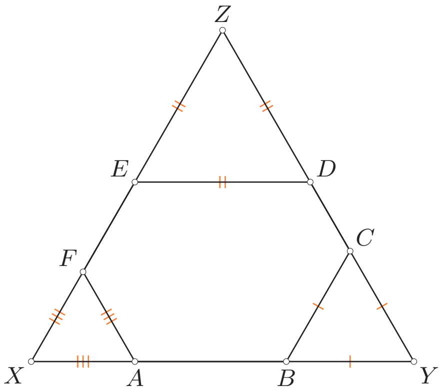
Zadanie 7.

Wszystkie kąty wewnętrzne sześciokąta $ABCDEF$ są równe. Udowodnij, że

$$AB-DE=EF-BC=CD-FA.$$

Rozwiązanie: Suma kątów wewnętrznych sześciokąta równa jest $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$. W rozważanym w zadaniu sześciokącie wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, więc każdy z nich ma miarę 120°.

Oznaczmy odpowiednio przez X, Y, Z punkty przecięcia prostych AB i EF, prostych AB i CD, oraz prostych CD i EF.



rys. 3

Zauważmy, że

$$\sphericalangle XAF = \sphericalangle XFA = \sphericalangle YBC = \sphericalangle YCB = \sphericalangle ZDE = \sphericalangle ZED = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Stąd trójkąty XAF, YCB, ZED oraz XYZ są równoboczne. Oznaczmy długości boków tych trójkątów odpowiednio przez x, y, z oraz t. Pozostaje zauważyć, że

$$AB-DE=(t-x-y)-z=t-x-y-z,$$

i analogicznie

$$EF-BC=CD-FA=(t-x-z)-y=(t-y-z)-x=t-x-y-z.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że istnieją liczby całkowite x, y większe od 999, dla których liczba

$$1 + 2^x + 2^y$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k mamy

$$(1 + 2^k)^2 = 1 + 2 \cdot 2^k + 2^{2k} = 1 + 2^{k+1} + 2^{2k}.$$

Biorąc $k = 1000$ uzyskujemy więc kwadrat w szukanej przez nas postaci.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: pewne trzy dodatnie dzielniki a, b, c liczby n spełniają równość $a + b + c + abc = n$.

Rozwiązanie: Rozważmy dowolne dodatnie liczby całkowite n, a, b, c spełniające warunki zadania. Wówczas liczba

$$b + c = n - abc - a = n - a(bc + 1).$$

jest podzielna przez a, ponieważ prawa strona jest różnicą dwóch liczb podzielnych przez a. Analogicznie stwierdzamy, że liczba $a + c$ jest podzielna przez b, oraz że liczba $a + b$ jest podzielna przez c. Innymi słowy, poniższe trzy liczby są całkowite

$$\frac{b+c}{a}, \quad \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a+b}{c}.$$

Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym przypadku trzy powyższe liczby całkowite równe są co najmniej 2. Wtedy mamy szacowanie

$$(b + c) + (c + a) + (a + b) \geqslant 2a + 2b + 2c,$$

co wobec równości obydwu stron tej nierówności oznacza, że $a = b = c$.

W drugim przypadku zakładamy, że jeden z ułamków wypisanych wyżej równy jest 1. Załóżmy najpierw, że $a \leqslant b \leqslant c$. Wtedy $a + b = c$, skąd liczba $a + c = 2a + b$ jest podzielna przez b, czyli b jest dzielnikiem $2a$. Skoro $a \leqslant b$, to $a = b$ lub $a = 2b$ Ostatecznie w przypadku $a \leqslant b \leqslant c$ uzyskujemy trójki

$$(a, a, a), \; (a, a, 2a), \; (a, 2a, 3a)$$

i odpowiadające im wartości liczby n (spełniające warunki zadania):

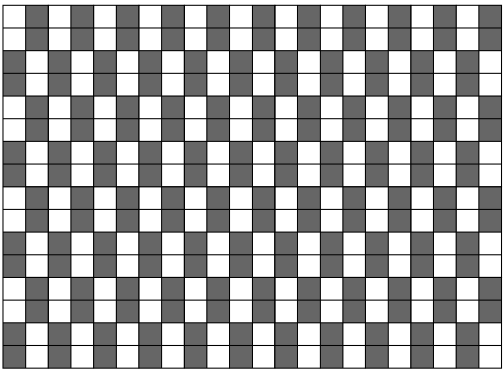
$$n = a(a^2 + 3), \quad n = 2a(a^2 + 2), \quad n = 6a(a^2 + 1),$$

dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej a. Zauważmy, że zmiana porządku liczb a, b, c nie zmienia uzyskanych rodzin rozwiązań. Są to zatem wszystkie rozwiązania.

Zadanie 10.

Niech n oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Rozważamy kartkę w kratkę rozmiaru $n \times m$ złożoną z nm pól rozmiaru 1×1. *Prostokątem* rozmiaru $r \times s$ nazywamy zbiór pól zawartych w tej kartce złożony z rs pól rozmiaru 1×1, gdzie $r \leqslant n$, $s \leqslant m$, ułożonych w r kolejnych wierszach i s kolejnych kolumnach kartki. Każde pole na rozważanej kartce w kratkę pomalowano na czarno lub biało. Okazało się, że każdy prostokąt rozmiaru $r \times s$, taki że liczba rs pól tego prostokąta jest podzielna przez 4, zawiera taką samą liczbę białych i czarnych pól. Czy wynika z tego, że kartka została pomalowana w *szachownicę*, to jest. tak, że każde dwa sąsiednie pola mają różny kolor?

Rozwiązanie: Odpowiedź jest negatywna.



rys. 4

Wystarczy rozważyć kolorowanie kartki w *szachownicę* 1×2 (przyjmijmy, że jednokolorowe prostokąty 1×2 są pionowe). Rozważmy prostokąty rozmiaru $r \times s$ spełniające warunki z treści zadania. Jeżeli r jest liczbą parzystą, to każde dwie kolejne kolumny prostokąta pokrywają tyle samo pól białych i czarnych, więc cała kartka także (wystarczy podzielić ją na pionowe paski o szerokości 2). Jeśli natomiast liczba r jest nieparzysta, to s jest liczbą podzielną przez cztery, a zatem w każdej kolumnie występuje tyle samo pól białych i czarnych.

Zadanie 11.

Ile co najmniej liczb trzeba usunąć ze zbioru

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots, 20,\ 21,\ 22,$$

aby wśród pozostałych liczb żadna nie była dzielnikiem innej?

Rozwiązanie: Odpowiedź: Trzeba usunąć co najmniej 11 liczb.

Najpierw wykażemy, że możliwe jest usunięcie z powyższego zbioru 11 liczb tak, aby wśród pozostałych żadna nie była dzielnikiem innej. Wystarczy usunąć z tego zbioru liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Istotnie, największa wśród pozostałych liczb jest mniejsza od dwukrotności najmniejszej, tzn. $22 < 2 \cdot 12$.

Wykażemy teraz, że 11 jest minimalną liczbą elementów rozważanego zbioru, którą można usunąć tak, aby wśród pozostałych liczb żadna nie była dzielnikiem innej. Przedstawmy każdą liczbę n ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 22 w postaci

$$n = k \cdot 2^m,$$

gdzie k jest największym dzielnikiem nieparzystym liczby n. Zauważmy, że gdy dwie dodatnie liczby całkowite zapisane w powyższej postaci mają takie same największe dzielniki nieparzyste, wówczas jedna z nich dzieli drugą. Rzeczywiście, jeśli istnieją takie nieujemne liczby całkowite r, s, że liczby

$$x = k \cdot 2^r \quad \text{oraz} \quad y = k \cdot 2^s$$

są dodatnimi liczbami całkowitymi o największym dzielniku nieparzystym k, to co najmniej jedna z liczb $\frac{x}{y} = 2^{s-r}$ lub $\frac{y}{x} = 2^{r-s}$ jest całkowita.

Zauważmy w końcu, że wśród 22 elementów rozważanego zbioru możliwych wartości największych dzielników nieparzystych jest 11 (liczby nieparzyste od 1 do 22). Stąd usuwając z rozważanego zbioru mniej niż 11 liczb, pozostawimy ich więcej niż 11, zatem pewne dwie z nich mają ten sam największy dzielnik nieparzysty. Wynika stąd, że mniejsza z tych liczb dzieli większą, czyli żądana własność nie zachodzi.

Zadanie 12.

Na płaszczyźnie wybrano 6 punktów tak, aby żadne trzy nie były współliniowe, i aby odległości pomiędzy wybranym punktami były parami różne. Rozważmy wszystkie odcinki o końcach w wybranych punktach. Udowodnij, że jeden z tych odcinków jest zarazem najdłuższym bokiem w pewnym z powstałych trójkątów i najkrótszym bokiem w innym powstałym trójkącie.

Rozwiązanie: Pokolorujmy na niebiesko każdy odcinek, który jest najdłuższym bokiem trójkąta o wierzchołkach będących wybranymi punktami. Pozostałe odcinki łączące wybrane punkty kolorujemy na czarno. Jest więc jasne, że nie istnieje trójkąt złożony z czarnych odcinków.

Wykażemy tezę zadania, jeśli uzasadnimy, że istnieje trójkąt, którego wszystkie boki są niebieskie. Wówczas najkrótszy z boków tego trójkąta spełni wymagane warunki — będzie oczywiście najkrótszym bokiem w tym trójkącie, a skoro jest pomalowany na niebiesko, to w pewnym trójkącie będzie również najdłuższym bokiem.

Niech X będzie jednym z wybranych punktów. Punkt ten jest końcem 5 odcinków w dwóch kolorach — wśród nich są przynajmniej 3 niebieskie odcinki, bądź przynajmniej 3 czarne odcinki.

Załóżmy najpierw, że punkt X jest końcem 3 czarnych odcinków, których drugimi końcami są odpowiednio punkty A, B i C. Skoro żaden z trójkątów XAB, XAC, ani XCB nie jest trójkątem złożonym z czarnych odcinków, to odcinki AB, BC i CA są niebieskie. W ten sposób otrzymujemy szukany trójkąt o niebieskich bokach.

Załóżmy, że punkt X jest końcem 3 odcinków niebieskich, których drugimi końcami są odpowiednio punkty D, E i F. Wówczas, skoro trójkąt DEF nie może mieć jedynie czarnych boków, to jeden z odcinków DE, DF, EF jest niebieski, co ponownie daje trójkąt o niebieskich bokach.

Zadanie 13.

Dane są dodatnia liczba całkowita n oraz liczba pierwsza p. Załóżmy, że liczby $13n + 2022$ oraz $n - 2$ są podzielne przez p. Udowodnij, że również liczba $2023n + 18$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie: Z warunków zadania wynika, że liczba p dzieli różnicę liczb $13n+2022$ oraz $13(n-2)$, czyli liczbę 2048. Skoro $2048 = 2^{11}$, to $p = 2$. Liczba $n-2$ jest zatem parzysta, więc także liczby n oraz $2023n + 18$ są parzyste, czyli są podzielne przez p.

Zadanie 14.

Kosma stoi przed tablicą, na której napisane są nieparzyste liczby całkowite o sumie równej k. Co minutę Kosma wybiera jedną z liczb na tablicy, zmazuje ją i w jej miejsce wpisuje jej sześcian. Czy jest możliwe, aby w pewnym momencie po ruchu Kosmy suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy była równa $k + 12$?

Rozwiązanie: Skoro sześcian liczby nieparzystej jest również takowy, to na tablicy nigdy nie pojawi się liczba parzysta. Kosma w każdym ruchu zamienia pewną liczbę nieparzystą n na liczbę n^3. Zatem suma liczb zapisanych na tablicy zmienia się dokładnie o liczbę $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. Wykażemy, że liczba ta jest podzielna przez 8. Istotnie, $n-1$ i $n+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi. Jedna z nich jest więc podzielna przez 4, a druga jest podzielna przez 2. W rezultacie po każdym ruchu Kosmy suma zapisanych na tablicy liczb zmienia się o liczbę podzielną przez 8. Skoro $k+12-k=12$ nie jest liczbą podzielną przez 8, to suma liczb zapisanych na tablicy nie osiągnie w żadnym momencie wartości $k+12$.

Zadanie 15.

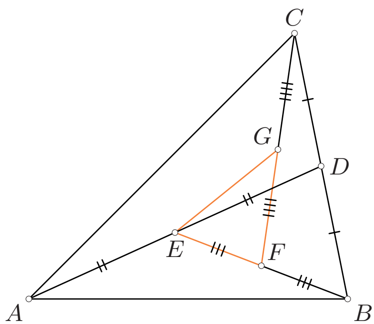
W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest środkiem odcinka AD, punkt F jest środkiem odcinka BE, a punkt G jest środkiem odcinka CF. Udowodnij, że pole trójkąta EFG jest 8 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie: Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Korzystać będziemy z następującej obserwacji: jeśli punkt M jest środkiem boku YZ w trójkącie XYZ, to ma miejsce równość $[XZM] = \frac{1}{2} \cdot [XYZ]$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Korzystając z powyższej obserwacji dla trójkątów FCE, BCE, BAD, ADC oraz ABC, otrzymujemy ciąg równości:

$$\begin{aligned}[EGF] &= \frac{1}{2} \cdot [FCE] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [BCE] = \frac{1}{4} \cdot ([BDE] + [CDE]) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot [BAD] + \frac{1}{2} \cdot [ADC]\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot [ABC] = \frac{1}{8} \cdot [ABC].\end{aligned}$$

Uzyskujemy więc żądaną równość, co kończy dowód.



rys. 5

Uwaga. Dowód obserwacji sformułowanej wyżej jest następujący. Niech h będzie wysokością trójkąta XYZ opuszczoną z wierzchołka X. Wtedy bezpośrednio ze wzoru na pole trójkąta uzyskujemy $[XZM] = \frac{1}{2} \cdot h \cdot MZ = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot YZ = \frac{1}{2} \cdot [XYZ]$.

Zadanie 16.

Niech $ABCDE$ będzie takim pięciokątem wypukłym, że czworokąt $ABDE$ jest kwadratem, a trójkąt BCD jest równoboczny. Niech P będzie takim punktem, że trójkąt CEP jest równoboczny, przy czym P jest po tej samej stronie prostej CE co punkt D. Wyznacz miarę kąta PAE.

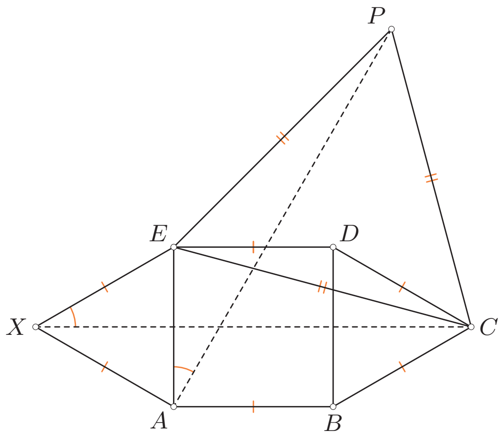
Rozwiązanie: Niech X będzie takim punktem na zewnątrz kwadratu $ABDE$, że trójkąt AEX jest równoboczny. Mamy $EA = EX$, $EP = EC$ oraz

$$\measuredangle PEA = 60^\circ + \measuredangle CEA = \measuredangle CEX,$$

i stąd trójkąty PEA i CEX są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wynika stąd, że

$$\measuredangle PAE = \measuredangle CXE = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle EXA = 30^\circ,$$

przy czym druga równość wynika z symetrii punktów A i E względem prostej CX.



rys. 6

Zadanie 17.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba $2(a^4 + b^4 + (a + b)^4)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, uzyskując

$$2(a^4 + b^4 + (a + b)^4) = 4(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4).$$

Oczywiście liczba 4 jest kwadratem, więc wystarczy udowodnić, że jest nim również drugi czynnik. W istocie liczba $a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$ równa jest

$$
\begin{aligned}
&(a^4 + a^3b + a^2b^2) + (a^3b + a^2b^2 + ab^3) + (a^2b^2 + ab^3 + b^4) = \\
&a^2(a^2 + ab + b^2) + ab(a^2 + ab + b^2) + b^2(a^2 + ab + b^2) = \\
&(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 + ab + b^2)^2.
\end{aligned}
$$

Zadanie 18.

Rozstrzygnij, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c spełniające układ równań

$$
\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 111, \\ \ \ 4b + 5a + 6c = 78. \end{cases}
$$

Rozwiązanie: Pomnóżmy drugie równanie przez 2 i odejmijmy je od pierwszego:

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2(4b + 5a + 6c) &= -45, \\
a^2 - 10a + 2b^2 - 8b + 3c^2 - 12c &= -45, \\
a^2 - 10a + 25 + 2(b^2 - 4b + 4) + 3(c^2 - 4c + 4) &= 0, \\
(a-5)^2 + 2(b-2)^2 + 3(c-2)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Suma kwadratów liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ze składników jest równy 0. Zatem jedynym możliwym rozwiązaniem wyjściowego układu jest trójka

$$
a = 5, \quad b = 2, \quad c = 2.
$$

Jednakże po podstawieniu otrzymanej trójki liczb do pierwszego równania wyjściowego układu otrzymujemy $5^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^2 = 45$, czyli liczbę różną od 111. Nie istnieją zatem rozwiązania wyjściowego układu równań.

Zadanie 19.

W kinie Słoneczko jest pewna sala, w której miejsca są ponumerowane liczbami naturalnymi od 1 do 100. Pewnego dnia 100 widzów przyszło na wspólny seans, a po przerwie wszyscy wrócili do sali na następny seans, zmieniając jednak miejsca siedzenia. Udowodnij, że jeśli każdy ze 100 widzów policzy różnicę między większym a mniejszym numerem miejsc, na których siedział podczas dwóch seansów, to suma tych stu liczb jest parzysta.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez a_i numer miejsca i-tego widza podczas pierwszego seansu, a przez b_i oznaczmy numer miejsca tego widza podczas drugiego seansu. Różnica większego i mniejszego numeru miejsca zajmowanego przez i-tego widza jest więc równa $|a_i - b_i|$, dla $1 \leqslant i \leqslant 100$. Stąd wystarczy uzasadnić, że poniższa suma jest liczbą parzystą:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \ldots + |a_{100} - b_{100}|.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej a liczba $|a|$ jest równa albo a, albo $-a$, więc ma tę samą parzystość, co a. Zatem wystarczy uzasadnić, że liczba

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_{100} - b_{100})$$

jest parzysta. Jednakże zbiór $\{a_1, \ldots, a_{100}\}$ jest równy zbiorowi $\{b_1, \ldots, b_{100}\}$. Innymi słowy liczby $b_1, \ldots, b_{100}$ to liczby $a_1, \ldots, a_{100}$ zapisane w innej kolejności. Stąd

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \ldots + a_{100} - b_{100} = 0.$$

Rozważana suma wartości bezwzględnych jest zatem tej samej parzystości co 0.

Zadanie 20.

Jaś ma prawą i lewą rękawiczkę, prawą i lewą skarpetkę oraz prawy i lewy but. Zakłada on na siebie te ubrania jedno po drugim w pewnej kolejności, przy czym nie zakłada skarpetki na but. Na ile sposobów Jaś jest w stanie poprawnie się ubrać?

Rozwiązanie: Załóżmy najpierw, że Jaś nie pamięta o zasadach poprawnego ubioru i może zakładać skarpetki na buty, oczywiście wciąż zakładając je na odpowiadającą im kończynę. W takiej sytuacji Jaś ma 6 wyborów tego, co założy jako pierwsze, 5 wyborów tego, co założy jako drugie, 4 wybory tego, co założy jako trzecie, 3 wybory tego, co założy jako czwarte, itd. Uzyskujemy więc $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ sposobów na założenie wszystkich rzeczy, oczywiście łącznie z niepoprawnymi sposobami ubioru.

Policzmy teraz ile jest niepoprawnych sposobów ubrania się. Zauważmy, że na każdy poprawny sposób przypadają 3 niepoprawne:

- gdy Jaś zmieni kolejność wkładania lewej skarpetki i lewego buta, zakładając resztę w tej samej kolejności,
- gdy Jaś założy prawą skarpetkę na prawy but, a resztę bez zmiany,
- gdy Jaś założy obydwie skarpetki na buty.

Rozbiliśmy zatem zbiór wszystkich 720 sposobów ubierania się na rozłączne podzbiory zawierające po 4 sposoby, przy czym w każdym z tych podzbiorów dokładnie jeden sposób jest poprawny. Zatem poprawnych sposobów ubierania się jest $\frac{720}{4} = 180$.

Zadanie 21.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b

$$\frac{a}{2a+b} \geqslant \frac{a}{2a+2b} \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{2b+a} \geqslant \frac{b}{2b+2a}.$$

W obydwu przypadkach porównujemy bowiem ułamki o tych samych licznikach, zmieniając jednak ich mianowniki. Zatem:

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} \geqslant \frac{a}{2a+2b} + \frac{b}{2b+2a} = \frac{a+b}{2a+2b} = \frac{1}{2},$$

co kończy dowód.

Zadanie 22.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$\mathrm{NWD}(a+c, b+c) = a+b.$$

Wykaż, że $a = b = c$.

Rozwiązanie: Rola liczb a, b jest symetryczna, więc bez straty ogólności możemy założyć, że $a \geqslant b$. Skoro liczby $a+c$ i $b+c$ są podzielne przez $a+b$, to ich różnica $(a+c)-(b+c) = a-b$ też. Jednakże $0 \leqslant a-b < a+b$, więc $a-b=0$, czyli $a=b$. Uzyskujemy stąd

$$a+c = \mathrm{NWD}(a+c, a+c) = a+b = 2a,$$

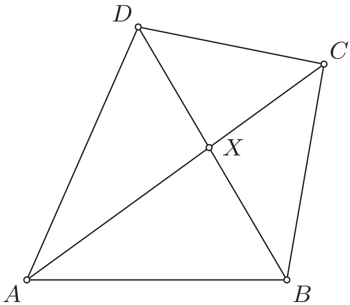
więc też $a = c$.

Zadanie 23.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie X. Obwody trójkątów ABX i CDX równe są odpowiednio 3 oraz 1. Wykaż, że suma obwodów trójkątów BCX i DAX jest nie większa od 8.

Rozwiązanie: Wykażemy, że obwód każdego z trójkątów BCX i DAX jest nie większy od 4. Korzystając wielokrotnie z nierówności trójkąta, uzyskujemy

$$\begin{aligned} BC + BX + CX &< (BX + CX) + BX + CX \\ &< (BX + CX) + (AB + AX) + (CD + DX) \\ &= (AB + AX + BX) + (CD + CX + DX) = 3 + 1 = 4. \end{aligned}$$



rys. 7

Zatem obwód trójkąta BCX jest nie większy od 4. Analogicznie uzasadniamy, że obwód trójkąta DAX jest nie większy od 4, więc suma obwodów trójkątów BCX i DAX jest nie większa od 8.

Zadanie 24.

W 2022-kącie foremnym poprowadzono 19 przekątnych, z których żadne dwie nie przecinają się we wnętrzu wielokąta (mogą mieć jednak wspólne końce), i które dzielą ten 2022-kąt foremny na pewną liczbę wielokątów. Udowodnij, że pewien wielokąt powstały w wyniku tego podziału ma co najmniej 103 wierzchołki.

Rozwiązanie: Zgodnie z założeniami zadania, prowadząc 19 przekątnych, dzielimy 2022-kąt foremny na 20 wielokątów. Zauważmy dalej, że każdy z boków 2022-kąta jest bokiem dokładnie jednego z wielokątów, na które został on podzielony, natomiast każda z 19 przekątnych należy do dokładnie dwóch z tych wielokątów. Zatem wyznaczając dla każdego z 20 wielokątów liczbę jego boków, i dodając do siebie uzyskane liczby, otrzymamy

$$2022 + 2 \cdot 19 = 2060.$$

Skoro w wyniku podziału 2022-kąta foremnego powstało 20 wielokątów mających łącznie 2060 boków, to jeden z tych 20 wielokątów ma co najmniej $\frac{2060}{20} = 103$ boków, czyli co najmniej 103 wierzchołki.

Zadanie 25.

Niech a, b, c będą długościami boków w trójkącie o polu S. Udowodnij, że

$$S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

Rozwiązanie: Na początku zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \geqslant \frac{ab + bc + ca}{6}.$$

Istotnie, mnożąc obie strony przez 12 i przenosząc wyrazy na jedną stronę, mamy:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geqslant 0.$$

Oznaczmy wierzchołki rozważanego trójkąta przez A, B, C, oraz przyjmijmy, że $AB = c$, $BC = a$ i $AC = b$.

Zauważmy najpierw, że $S \leqslant \frac{ab}{2}$. Powód jest następujący: pole trójkąta równe jest $\frac{ah}{2}$, gdzie h jest wysokością opuszczoną z wierzchołka A. Jednakże h to najmniejsza możliwa długość odcinka łączącego punkt A z prostą BC, skąd $h \leqslant b$. Zatem

$$S = \frac{ah}{2} \leqslant \frac{ab}{2}.$$

Analogicznie postępujemy z ac i bc, otrzymując

$$3S \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}.$$

Łącząc ten wniosek z nierównością uzyskaną na początku rozwiązania, uzyskujemy

$$S \leqslant \frac{ab + bc + ca}{6} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6},$$

co kończy dowód.

Uwaga. W powyższych nierównościach równość zachodzi tylko, gdy $a = b = c = 0$. Te wartości nie spełniają jednak warunków zadania, więc rozważana nierówność jest zawsze ostra.

Zadanie 26.

Piotrek ma wagę szalkową oraz zestaw 10 odważników o różnych masach będących liczbami całkowitymi z przedziału od 1 do 100. Udowodnij, że stawiając swe odważniki na szalach, Piotrek może uzyskać równowagę.

Rozwiązanie: Policzmy, na ile sposobów Piotrek może wybrać niepusty podzbiór ze zbioru dziesięciu odważników. Każdy odważnik (niezależnie od pozostałych) może albo zostać wybrany, albo nie, co daje dwie możliwości. Otrzymujemy stąd liczbę wszystkich podzbiorów 10-elementowego zbioru odważników: 2^{10}. Jednak wliczony w to został przypadek, w którym Piotrek nie wybiera żadnego odważnika, czyli liczba sposobów wyboru pewnych odważników równa jest

$$2^{10} - 1 = 1023.$$

Zauważmy dalej, że maksymalna możliwa masa nie więcej niż 10 odważników jest nie większa od $10 \cdot 100 = 1000$, a minimalna możliwa łączna masa odważników jest nie mniejsza od 1. Stąd wnioskujemy, że jest 1000 możliwych łącznych mas nie więcej niż 10 odważników. Mamy natomiast aż 1023 możliwe zbiory odważników. Wnioskujemy stąd, że pewne dwa z tych zbiorów złożone są z odważników, których łączne masy są równe. Rozważmy dwa przypadki.

- Jeśli dwa wskazane podzbiory są rozłączne (nie mają wspólnych elementów), to Piotr może postawić wszystkie elementy jednego zbioru na lewej szalce oraz wszystkie elementy drugiego zbioru na prawej szalce, uzyskując równowagę.
- Jeżeli dwa wskazane podzbiory mają niepustą część wspólną, to usuwając z nich powtarzające się odważniki, uzyskujemy dwa podzbiory rozłączne, które nadal złożone są z odważników, których łączne masy są równe, co sprowadza problem do poprzedniego przypadku.

Stąd w obydwu możliwych przypadkach Piotrek może doprowadzić do równowagi.

Zadanie 27.

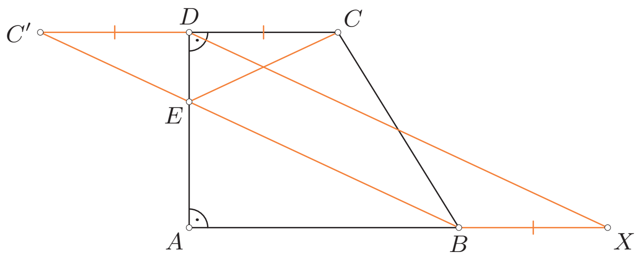
Dany jest trapez $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Niech E będzie takim punktem na boku AD, że $\sphericalangle BEA = \sphericalangle CED$. Wykaż, że

$$(AB + CD)^2 + AD^2 = (BE + CE)^2.$$

Rozwiązanie: Niech C' będzie obrazem punktu C w symetrii względem prostej AD. Wtedy $\sphericalangle C'ED = \sphericalangle CED = \sphericalangle BEA$, zatem punkty C', E i B są współliniowe. Niech X będzie takim punktem, że czworokąt $C'BXD$ jest równoległobokiem. Oczywiście punkt X leży na prostej AB, ale nie na półprostej BA. Trójkąt DAX jest prostokątny i przy wierzchołku A ma kąt prosty. Długości jego boków są równe AD oraz

$$AX = AB + BX = AB + C'D = AB + CD,$$
$$DX = C'B = BE + C'E = BE + CE,$$

co w połączeniu z twierdzeniem Pitagorasa daje tezę.



rys. 8

Zadanie 28.

Znajdź wszystkie liczby naturalne n, których najmniejszy dzielnik większy od 1 jest 45 razy mniejszy od największego dzielnika właściwego (mniejszego od n).

Rozwiązanie: Oznaczmy przez d najmniejszy dzielnik liczby n większy od 1. Zauważmy, że największym dzielnikiem właściwym liczby n jest liczba $\frac{n}{d}$. Gdyby bowiem istniał większy dzielnik właściwy liczby m równy x, to liczba $\frac{n}{x}$ byłaby dzielnikiem n mniejszym od d i większym od 1 (skoro $x < n$), co jest niemożliwe.

Skoro liczba $45d$ jest dzielnikiem liczby n, to liczba ta jest podzielna przez 3 i w rezultacie $d \leqslant 3$. Uzyskujemy zatem dwie możliwości: $d = 2$ i $d = 3$.

Wiemy jednakże, że największy dzielnik właściwy liczby n to z jednej strony $45d$, a z drugiej strony — $\frac{n}{d}$. Stąd

$$45d = \frac{n}{d},$$

czyli $n = 45d^2$. Zatem liczba n jest równa $45 \cdot 4 = 180$ lub $45 \cdot 9 = 405$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obydwie uzyskane liczby spełniają warunki zadania.

Zadanie 29.

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek liczb naturalnych a, b, c, d większych od 1000, takich że liczby c, d są względnie pierwsze oraz

$$a^2 + b^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych c, d zachodzi równość

$$(c-d)^2 + (c+d)^2 = 2c^2 + 2d^2.$$

Wystarczy więc udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb względnie pierwszych c, d, takich że liczby c, d, $c-d$, $c+d$ są większe od 1000.

Niech $d = 1001$ oraz niech c będzie liczbą pierwszą większą od 2002. Takich liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, więc każda z nich jest względnie pierwsza z d. Dla każdej takiej pary c, d określamy $a = c - d$ oraz $b = c + d$, co daje nam nieskończenie wiele czwórek liczb całkowitych a, b, c, d, spełniających warunki zadania.

Zadanie 30.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c, d zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+d} + \frac{d}{3d+a} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że zwiększając wartość mianownika dodatniego ułamka i nie zmieniając jego licznika, zmniejszamy wartość całego ułamka. Mamy zatem:

$$\frac{a}{3a+b} > \frac{a}{3a+3b+3c+3d},$$
$$\frac{b}{3b+c} > \frac{b}{3a+3b+3c+3d},$$
$$\frac{c}{3c+d} > \frac{c}{3a+3b+3c+3d},$$
$$\frac{d}{3d+a} > \frac{d}{3a+3b+3c+3d}.$$

Dodając strony powyższych nierówności, otrzymujemy tezę. Nie istnieją przy tym liczby dodatnie a, b, c, d, dla których nierówność z treści zadania staje się równością.

Zadanie 31.

Na patyku stoi pewna liczba mrówek. W pewnym momencie wszystkie mrówki zaczynają się poruszać ze stałą prędkością równą (temu) jednemu patykowi na minutę. Gdy dwie mrówki wpadną na siebie, zmieniają kierunek i ruszają w przeciwne strony (nie zmieniając prędkości). Jeżeli mrówka dojdzie do końca patyka, to spada na ziemię. Udowodnij, że po minucie wszystkie mrówki spadną z patyka.

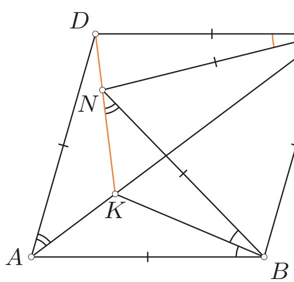
Rozwiązanie: Przypuśćmy, że mrówki zamiast odbijać się i zmieniać kierunek przenikają przez siebie i kontynuują drogę w tym samym kierunku, co przed spotkaniem. Zauważmy, że dwie mrówki zmierzające w swoim kierunku zarówno po zderzeniu, jak i po przeniknięciu przez siebie oddalają się od siebie w tym samym tempie. Innymi słowy, odbijanie i przenikanie się stanowią taką samą operację, jeśli nie rozróżniamy mrówek. Możemy więc założyć, że mrówki się przenikają. Po minucie zatem wszystkie mrówki wyjdą poza patyk i spadną.

Zadanie 32.

Niech N będzie punktem wewnętrznym rombu $ABCD$, takim że trójkąt BNC jest równoboczny. Dwusieczna kąta ABN przecina prostą AC w punkcie K. Wykaż, że

$$BK = KN + ND.$$

Rozwiązanie: Wykażemy, że punkty D, N, K leżą na jednej prostej. Zauważmy, że wystarczy w tym celu udowodnić równość $\sphericalangle DNC + \sphericalangle CNB + \sphericalangle BNK = 180^\circ$. Skoro jednak $\sphericalangle CNB = 60^\circ$, to wykazać należy jedynie, że $\sphericalangle DNC + \sphericalangle BNK = 120^\circ$.



rys. 9

Oznaczmy przez α miarę kąta DCN. Skoro czworokąt $ABCD$ jest rombem, to mamy równości $BC = CD = CN$ i stąd $\sphericalangle DNC = \sphericalangle NDC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Mamy również $BN = AB$, skąd $\sphericalangle BNA = \sphericalangle NAB$. W rezultacie

$$\sphericalangle BNK = \sphericalangle BNA - \sphericalangle ANK = \sphericalangle BNA - (\sphericalangle NAB - \sphericalangle CAB)$$
$$= \sphericalangle CAB = \frac{\sphericalangle BAD}{2} = \frac{\sphericalangle BCD}{2} = \frac{60^\circ + \alpha}{2}.$$

Łącząc powyższe równości otrzymujemy:

$$\sphericalangle DNC + \sphericalangle CNB + \sphericalangle BNK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 60^\circ + 30^\circ + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ.$$

Punkty K, N, D są więc istotnie współliniowe, czyli $KD = KN + ND$. Aby zakończyć dowód równości $BK = KN + ND$ wystarczy więc wykazać, że $BK = KD$. Ta równość wynika jednak z faktu, że punkt K leży na dwusiecznej AC kąta BCD, czyli trójkąty CDK oraz CBK są przystające (na mocy cechy bok–kąt–bok).

Zadanie 33.

Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\left(b + \sqrt{b^2+1}\right) = 1.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

Rozwiązanie: Z wzoru na różnicę kwadratów mamy

$$\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)\left(\sqrt{a^2+1} - a\right) = (a^2+1) - a^2 = 1.$$

Stąd mamy $\sqrt{a^2+1} - a = \sqrt{b^2+1} + b$, co prowadzi do równości

$$a + b = \sqrt{a^2+1} - \sqrt{b^2+1}.$$

Analogicznie jednak możemy uzasadnić, że liczba $a + b$ jest liczbą przeciwną do powyższej, tzn. $a + b = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1}$. Zatem $a + b = 0$. Ta wartość jest osiągana choćby dla $a = 1$, $b = -1$, ponieważ $(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = 2 - 1 = 1$.

Zadanie 34.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność:

$$\frac{ab + c}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc + a}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac + b}{(a+b)(b+c)} \geqslant 3.$$

Rozwiązanie: Przekształćmy pierwszy ułamek lewej strony rozważanej nierówności:

$$\frac{ab + c \cdot 1}{(a + c)(b + c)} = \frac{ab + c(a + b + c)}{ab + bc + ac + c^2} = \frac{ab + ac + bc + c^2}{ab + ac + bc + c^2} = 1.$$

Również pozostałe dwa ułamki z lewej strony rozważanej nierówności przyjmują dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wartość 1. Rozważana nierówność jest więc równością.

Zadanie 35.

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki $x + y + z = 2$ oraz $xy + yz + zx = 1$. Wyznacz największą możliwą wartość liczby $x - y$.

Rozwiązanie: Odejmując od obydwu stron pierwszej równości liczbę $x + y$, otrzymujemy $z = 2-(x+y)$. Podstawiamy do drugiej równości liczbę $2-(x+y)$ zamiast liczby z, uzyskując

$$xy + (2 - x - y)(x + y) = 1.$$

Wykonujemy następujące podstawienie: $s = x + y$, $t = x - y$. Mamy zatem

$$xy = \frac{4xy}{4} = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4} = \frac{s^2 - t^2}{4}.$$

Możemy zatem wyrazić liczbę $xy + (2 - x - y)(x + y) = 1$ za pomocą liczb s i t:

$$1 = xy + (2 - x - y)(x + y) = \frac{s^2 - t^2}{4} + (2 - s)s.$$

Wymnażając obie strony przez 4, redukując wyrazy podobne i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy, otrzymujemy:

$$t^2 = -3s^2 + 8s - 4 = -3s^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = -\left(s\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3} \leqslant \frac{4}{3}.$$

Przy tym ostatnia nierówność wynika z faktu, że liczba przeciwna do kwadratu liczby rzeczywistej jest niedodatnia. Mamy więc

$$x - y = t \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Zauważmy w końcu, że liczby $x = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ spełniają warunki zadania oraz $x - y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Największa możliwa wartość liczby $x - y$ jest więc równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 36.

Przy dwóch n-osobowych stołach siedziało początkowo $2n$ osób. W pewnym momencie wystartował następujący proces: co minutę pewne dwie osoby, które nie siedziały przy tym samym stole, zamieniały się miejscami. Proces zatrzymał się, gdy każda para osób zamieniła się miejscami dokładnie raz. Udowodnij, że jeżeli na początku pewne dwie osoby siedziały przy tym samym stole, to po zakończeniu procesu te dwie osoby również siedziały przy tym samym stole.

Rozwiązanie: Jeżeli pewna osoba zamieniła się dokładnie raz z każdą z pozostałych $2n-1$ osób, to zmieniła ona miejsce dokładnie $2n-1$, czyli nieparzystą liczbę razy. Jeżeli osoby A i B początkowo siedziały przy tym samym stole i każda z nich dokładnie $2n-1$ razy zmieniła stół przy którym siedziała, to po wszystkich tych zmianach osoby A i B znów siedziały przy tym stole.

Zadanie 37.

Wyznacz najmniejszą liczbę pól szachownicy rozmiaru 8×8, które wystarczy przemalować z koloru białego na czarny lub z koloru czarnego na biały, aby uzyskać sytuację, w której żadne dwa pola graniczące tylko jednym narożnikiem nie są tego samego koloru (pola graniczące całym wspólnym bokiem mogą mieć ten sam kolor).

Rozwiązanie: Podzielmy szachownicę na 16 rozłącznych kwadratów rozmiaru 2×2. Każdy z nich możemy podzielić na 2 pary pól graniczących jednym narożnikiem. W każdej z $16 \cdot 2 = 32$ takich par trzeba zmienić kolor co najmniej jednego pola, więc łącznie trzeba przemalować co najmniej 32 pola. Z drugiej strony przemalowując pola w kolumnach 2, 4, 6, 8, uzyskamy kolorowanie spełniające warunki zadania. To znaczy, że najmniejsza możliwa liczba pól do przemalowania równa jest 32.

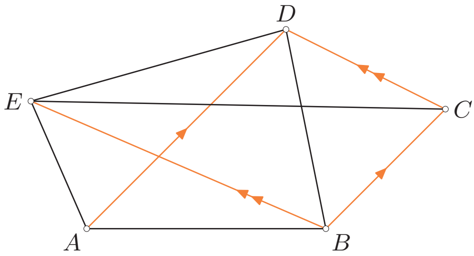
Zadanie 38.

Dany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że czworokąty $ABCD$, $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$ są trapezami. Każdy z tych trapezów ma parę równoległych boków złożoną z boku i przekątnej pięciokąta $ABCDE$. Udowodnij, że czworokąt $EABC$ też jest trapezem.

Rozwiązanie: Proste AD oraz BC są równoległe, więc w trójkątach ABC oraz DBC wysokości opuszczone na podstawę BC są równe. Zatem te trójkąty mają równe pola. Argumentując podobnie dla czworokątów $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, uzyskujemy

$$[ABC] = [DBC] = [DEC] = [DEA] = [EAB].$$

Stąd wysokości opuszczone na podstawę AB w trójkątach ABC oraz EAB są równe i czworokąt $EABC$ jest trapezem.



rys. 10

Zadanie 39.

Król Kosma ucieka do swojej wieży. Stoi on w lewym dolnym polu szachownicy rozmiaru $n \times n$. Na każdym polu tej szachownicy stoi drogowskaz wskazujący w prawo, w lewo, w górę, bądź w dół. Król Kosma w każdym ruchu wykonuje dwie czynności — po pierwsze: idzie w stronę, w którą wskazuje drogowskaz stojący na jego polu, a po drugie: aby zmylić pościg obraca drogowskaz za sobą o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Gdyby Król Kosma nie miał możliwości przejścia na pole wskazywane przez drogowskaz, innymi słowy jeśli miałby wyjść poza krawędź tabeli, to nie wykonuje ruchu, a jedynie obraca drogowskaz. Udowodnij, że Król Kosma trafi po pewnej liczbie ruchów do wieży, która stoi w prawym górnym rogu szachownicy.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że Król Kosma nie trafi do wieży. Oznacza to, że na pewnym polu szachownicy stanie on dowolnie wiele razy. Mówiąc inaczej, za każdym razem gdy Król Kosma staje na takim polu wiadomo, że stanie na nim ponownie w dalszej podróży. Nazwijmy takie pole: *powrotnym*.

Pole powrotne ma tę własność, że gdy drogowskaz na nim umieszczony zmienia kierunek, to po pewnej liczbie ruchów ten kierunek zostanie ponownie ustawiony. Mówiąc inaczej, na polu powrotnym każdy drogowskaz wskazuje w dowolnym kierunku dowolną liczbę razy. Oznacza to, że każde pole sąsiadujące z polem powrotnym samo jest powrotne.

Wnioskujemy stąd, że trafienie na jedno pole powrotne wymusza trafienie na każde pole szachownicy, które jest z nim połączone ścieżką sąsiednich pól. Skoro zakładamy, że Król Kosma stanie na jakimś polu powrotnym, to wnioskujemy, że Król Kosma stanie na każdym polu szachownicy — w tym na polu z wieżą. Sprzeczność.

Zadanie 40.

Niech ABC będzie trójkątem. w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 20^\circ$. Na boku BC wybrano taki punkt D, że zachodzi równość $CD = AB$. Wykaż, że $\sphericalangle ADB = 30^\circ$.

Rozwiązanie: Niech E będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AC, co punkt B, że trójkąt ACE jest równoboczny. Skoro trójkąt ABC jest równoramienny, to $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = 80^\circ$, skąd:

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \sphericalangle BCA.$$

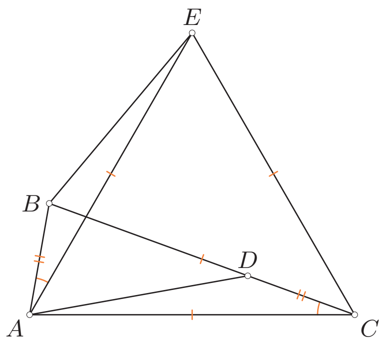
Skoro $CD = AB$ i $AC = AE$, to z równości kątów otrzymanej wyżej wynika, że trójkąty ABE oraz CDA są przystające (cecha bok–kąt–bok).

Zachodzi również równość $CE = BC$, więc

$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle BEC = \frac{180^\circ - \sphericalangle BCE}{2} = \frac{180 - (60^\circ - 20^\circ)}{2} = 70^\circ,$$

co pozwala wyznaczyć szukaną miarę kąta ADB:

$$\begin{aligned}\sphericalangle ADB &= 180^\circ - \sphericalangle CDA \\ &= 180^\circ - \sphericalangle EBA \\ &= 180^\circ - \sphericalangle EBD - \sphericalangle ABC \\ &= 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ.\end{aligned}$$



rys. 11

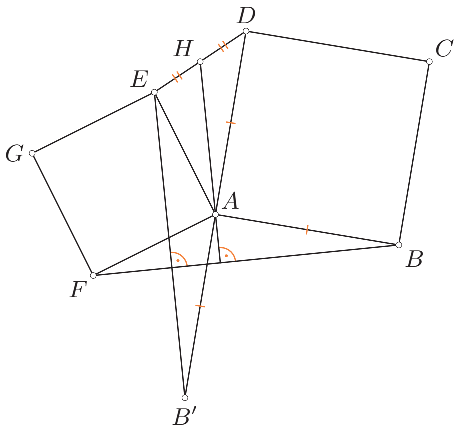
Zadanie 41.

Dane są kwadraty $ABCD$ i $AEGF$. Niech H będzie takim punktem na odcinku ED, że prosta AH jest prostopadła do prostej FB. Załóżmy przy tym, że $AH = 4$. Wyznacz długość odcinka BF.

Rozwiązanie: Rozważmy obrót wokół punktu A o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, czyli taki, przy którym punkt D przechodzi na punkt B oraz punkt F przechodzi na punkt E.

Niech B' będzie obrazem punktu B przy tym obrocie. Wtedy $\sphericalangle DAB' = 180^\circ$, czyli punkty D, A, B' leżą na jednej prostej oraz $DA = AB = AB'$. Ponadto odcinek FB przechodzi przy tym obrocie na odcinek EB', czyli (z własności obrotu) kąt pomiędzy tymi odcinkami jest prosty. Stąd zarówno proste $B'E$ oraz FB, jak i proste FB oraz AH są prostopadłe. Stąd proste $B'E$ oraz AH są równoległe.

Punkt A jest środkiem odcinka DB', a odcinek AH jest równoległy do podstawy $B'E$ w trójkącie $B'DE$. Stąd AH jest linią środkową w tym trójkącie, a zatem $B'E = 2 \cdot AH$. Ostatecznie więc $BF = B'E = 2 \cdot AH = 2 \cdot 4 = 8$.



rys. 12

Zadanie 42.

Znajdź wszystkie takie trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c, dla których liczba $3^a + 3^b + 3^c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Rola liczb a, b, c w tym zadaniu jest symetryczna. Możemy więc bez straty ogólności założyć, że $a \geqslant b \geqslant c$, oraz że liczba $3^a + 3^b + 3^c$ jest kwadratem liczby całkowitej. Możemy też zapisać $3^a + 3^b + 3^c = 3^c(3^{a-c} + 3^{b-c} + 1)$.

Przypuśćmy, że $a \neq c$. Wtedy liczba $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1$ nie jest podzielna przez 3. Liczby 3^c oraz $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1$ są zatem względnie pierwsze. Skoro ich iloczyn jest kwadratem, to każda z nich jest kwadratem.

Liczba $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1$ nie jest jednak kwadratem, jeśli $a \neq c$. Reszty kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8 to 0, 1 lub 4. Natomiast możliwe reszty z dzielenia naturalnych potęg trójki przez 8 to 1 oraz 3. Stąd liczba $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1$ daje przy dzieleniu przez 8 resztę 3, 5 lub 7, czyli nie jest kwadratem. Uzyskaliśmy więc sprzeczność z przypuszczeniem, że $a \neq c$.

Niech $a = c$. Skoro $a \geqslant b \geqslant c$, to $a = b = c$. Sprawdźmy więc, dla jakich dodatnich liczb całkowitych a liczba $3 \cdot 3^a = 3^{a+1}$ jest kwadratem. Jest tak oczywiście dla każdej liczby nieparzystej a. Zatem jedyne trójki a, b, c spełniające warunek zadania, to trójki równych sobie dodatnich liczb nieparzystych.

Zadanie 43.

Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba $n = (5k+1)^2$ ma nieparzyście wiele dzielników dodatnich dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

Rozwiązanie: Oczywiście sama liczba n daje resztę 1 z dzielenia przez 5. Co więcej, jeśli dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem n, to również liczba $\frac{n}{d}$ jest dzielnikiem n. Jeśli $d \neq 5k+1$, to dzielniki d oraz $\frac{n}{d}$ są różne. Zatem wszystkie dzielniki liczby n oprócz $5k+1$ możemy rozdzielić na pary (d, e), takie że $de = n$. Jednakże jeśli zarówno iloczyn dwóch liczb całkowitych, jak i jeden z czynników, dają resztę 1 z dzielenia przez 5, to także drugi czynnik daje resztę 1 z dzielenia przez 5.

W rezultacie rozdzieliliśmy na pary wszystkie dodatnie dzielniki liczby n różne od $5k+1$ i dające resztę 1 przy dzieleniu przez 5. Tych dzielników liczby n jest więc parzyście wiele. Dołączając do nich dzielnik $5k+1$, uzyskujemy tezę.

Zadanie 44.

Powiemy, że liczba całkowita n większa od 1 jest *fajna*, jeśli w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każdy niezerowy wykładnik jest większy od 1, tzn. dla każdej liczby pierwszej p zachodzi implikacja: jeśli p jest dzielnikiem n, to również p^2 jest dzielnikiem n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par kolejnych liczb całkowitych, które są fajne.

Rozwiązanie: Jest jasne, że iloczyn dwóch liczb fajnych jest fajny, ponieważ każda liczba pierwsza wchodząca do rozkładu iloczynu liczb całkowitych na czynniki pierwsze, wchodzi do rozkładu jednego z czynników, a w tym rozkładzie występuje ona co najmniej w potędze o wykładniku 2. Również kwadrat dowolnej liczby całkowitej większej od 1 jest w sposób oczywisty fajny, ponieważ każdy dzielnik pierwszy kwadratu występuje w jego rozkładzie co najmniej dwa razy.

Z dwóch kolejnych liczb fajnych konstruujemy kolejną parę w następujący sposób. Niech a i $a+1$ będą liczbami fajnymi. Zauważmy, że:

- liczba $4a(a+1)$ jest fajna jako iloczyn liczb fajnych,
- liczba $(2a+1)^2$ jest fajna jako kwadrat liczby różnej od 1 (gdyż $a > 1$).

Dostaliśmy więc parę kolejnych liczb fajnych, które są większe od $a+1$.

Zauważmy wreszcie, że liczby 8 i 9 są kolejnymi liczbami fajnymi. Zatem par kolejnych liczb całkowitych, które są fajne jest nieskończenie wiele.